Démonstration de l'obtention de l'équation (signes à justifier plus rigoureusement).

Temps de parcours $T = \int \frac{\sqrt{x'^2+1}}{\sqrt{2gy}} dy$ $\left(x' = \frac{dx}{dy}\right)$; longueur $L = \int \sqrt{x'^2+1} dx$

Intégrale à extrémaliser : $T\sqrt{2g} - \lambda L = \int F dx$ avec $F = \sqrt{x'^2+1}\left(\frac{1}{\sqrt{y}} - \lambda\right)$.

Equation d'Euler Lagrange : $\frac{d}{dy}\frac{\partial F}{\partial x'} = \frac{\partial F}{\partial y}$ d'où après intégration : $\frac{\sqrt{x'^2+1}}{\sqrt{x'}} = C\left(\frac{1}{\sqrt{y}} - \lambda\right)$.

Si l'on pose $x' = \tan t$ alors $\frac{\sqrt{x'^2+1}}{\sqrt{x'}} = \sin t$, et $C\left(\frac{1}{\sqrt{y}} - \lambda\right) = \sin t$ donne

$$\boxed{y = c\frac{\sin^2 t}{(1+k\sin t)}}$$

avec $c = C^2$ et $k = \lambda C$.

Alors $\frac{dx}{dt} = x'\frac{dy}{dt} = \tan t \frac{2c\sin t\cos t}{(1+k\sin t)^3} = \frac{2c\sin^2 t}{(1+k\sin t)^3}$, d'où

$$\boxed{x = 2c\int \frac{\sin^2 t}{(1+k\sin t)^3} dt}$$