ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES
ECOLE CENTRALE DE LYON

ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

M - P'

Concours d'Admission 1988
*****

MATHEMATIQUES II

Dans l'ensemble du problème les vecteurs sont représentés, soit par une lettre en gras, soit par un couple de lettres surmontées d'une flèche. Le produit vectoriel de *a* par *b* sera représenté par *a* × *b*.

E désigne un espace affine euclidien orienté de dimension 3, V l'espace vectoriel associé.
On rappelle, **a**, **b**, **c**, étant trois éléments de V, la formule du double produit vectoriel :
$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a}.\mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a}.\mathbf{b})\,\mathbf{c}$

Soit I un intervalle de **R** de longueur non nulle. On désigne par D_I l'ensemble des applications de classe C^∞ de I dans V.

Pour tout élément **F** de D_I on note $W(\mathbf{F}) = \left[\mathbf{F},\ \mathbf{F}',\ \mathbf{F}''\right]$ l'application qui à tout t de I associe le produit mixte

$$W(\mathbf{F})(t) = \left[\mathbf{F}(t),\ \mathbf{F}'(t),\ \mathbf{F}''(t)\right]$$

On désigne enfin par P_I l'ensemble des éléments **F** de D_I tels que la fonction $W(\mathbf{F})$ soit à valeurs strictement positives.

La première partie établit des résultats de base qui servent dans le reste du problème. Les parties II et III sont indépendantes.
On tiendra le plus grand compte de la clarté de la rédaction et de la qualité des figures.

PREMIERE PARTIE.

I.1. Soit **a**, **b**, **c** trois éléments de V. Démontrer la formule

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = \left[\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}\right]\mathbf{a}$$

I.2. Soit $\mathbf{F} \in D_I$ et soit λ une application de classe C^∞ de I dans **R**.

On désigne par $\mathbf{G} = \mathbf{F} \times \mathbf{F}'$ l'élément de D_I défini par : $\forall t \in I,\ \mathbf{G}(t) = \mathbf{F}(t) \times \mathbf{F}'(t)$
Etablir les formules :

$$(1)\quad W(\lambda \mathbf{F}) = \lambda^3 W(\mathbf{F})$$
$$(2)\quad \mathbf{G} \times \mathbf{G}' = W(\mathbf{F})\,\mathbf{F}$$
$$(3)\quad W(\mathbf{G}) = (W(\mathbf{F}))^2$$

I.3.a) Soit $\mathbf{F} \in P_I$ et soit $\mathbf{G} = \mathbf{F} \times \mathbf{F}'$. Démontrer que $\mathbf{G} \in P_I$.
b) Inversement soit $\mathbf{G} \in P_I$; démontrer qu'il existe un élément **F** de P_I unique tel que $\mathbf{F} \times \mathbf{F}' = \mathbf{G}$ et établir la formule :

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{G} \times \mathbf{G}'}{\sqrt{W(\mathbf{G})}}$$

L'équation $\mathbf{F} \times \mathbf{F}' = \mathbf{G}$, où **G** est donné dans P_I a-t-elle des solutions appartenant à D_I mais non à P_I ?
Si oui, les donner.
Ainsi l'application S qui à tout élément **F** de P_I associe $S(\mathbf{F}) = \mathbf{F} \times \mathbf{F}'$ est une bijection de P_I sur lui-même.

I.4. Soit **F** et **G** deux éléments de P_I, λ une application de classe C^∞ de I dans $\mathbf{R}_+^*$. Déterminer $S(\lambda\mathbf{F})$ et $S^{-1}(\lambda\mathbf{G})$.

DEUXIEME PARTIE

Soit O un point fixe de E. Le temps t décrivant l'intervalle I, on considère un élément G de D_I et le point P de E défini, pour tout t de I, par $\overrightarrow{OP}(t) = G(t)$.

On cherche à déterminer le mouvement d'un point M tel que la fonction $\overrightarrow{OM}$ (c'est-à-dire $t \to \overrightarrow{OM}(t)$) appartienne à D_I et vérifie $\overrightarrow{OM} \times M' = G$, c'est-à-dire :

$$(4) \qquad \forall t \in I, \overrightarrow{OM}(t) \times M'(t) = G(t)$$

Soit $R = (O\,;\, i, j, k,)$ un repère orthonormal direct fixe.

II.1. On suppose ici que le point P décrit une courbe située dans un plan contenant O et qu'il existe t_0 tel que :
$G(t_0) \times G'(t_0) \neq 0$

a) Interpréter géométriquement cette dernière condition.
b) Que vaut W (G) ?
c) Existe-t-il des mouvements de M satisfaisant à la condition (4) ?

II.2. On suppose ici que W (G) ne prend jamais la valeur zéro.
a) Etablir que le signe de W (G) est constant.
b) Si W (G) < 0, existe-t-il un mouvement de M satisfaisant à la condition (4) ?
c) Si W(G) > 0, montrer qu'il existe deux mouvements de M vérifiant (4), dont l'un est donné par $\overrightarrow{OM} = S^{-1}(G)$.
(C.f. I.3.) . Comment s'en déduit l'autre ?

Dans la suite de cette partie, on supposera que $G \in P_I$ *et que* $\overrightarrow{OM} = S^{-1}(G)$.

II.3. On note (C) (resp : (C_1)) le cône de sommet O engendré par la droite (OM (t)) (resp : par la droite (OP (t))) quand t décrit I. Quelle relation existe-t-il entre la génératrice (OP (t)) de (C_1) et le plan tangent à (C) le long de la génératrice (OM (t)) ? Donner une définition géométrique de (C_1) à partir de (C), et une définition géométrique de (C) à partir de (C_1).

II.4. On suppose le mouvement de P défini dans R par : $\overrightarrow{OP}(t) = i + t\,j + t^2 k$ où t décrit R.

a) Vérifier que cette fonction appartient à P_I
b) Donner une équation cartésienne du cône (C_1) engendré par la droite (OP).
c) Donner dans le repère R les coordonnées cartésiennes de M.
d) Donner une équation cartésienne du cône (C) engendré par la droite (OM).
e) Nature, symétries, position relative des courbes intersections de (C) et (C_1) par le plan d'équation $x + z = 1$.
Faire une figure représentant ces deux courbes. Que dire de la position relative des deux cônes ?

II.5. On suppose que le mouvement du point P s'effectue dans un plan ne passant pas par O. Montrer que la droite passant par M (t) et dirigée par le vecteur M" (t) est coplanaire à une droite fixe issue de O. Quelle réciproque peut-on énoncer ?

II.6. On suppose que le mouvement de P est défini dans le repère R par :
$\overrightarrow{OP} = u + k$ où $u = \cos\theta\, i + \sin\theta\, j$, l'application $t \to \theta(t)$ de I dans R étant de classe C^∞.

a) A quelle condition portant sur la fonction θ la fonction $G = \overrightarrow{OP}$ appartient-elle à P_I ?

b) On suppose que la fonction θ de t vérifie la condition précédente et l'on considère le mouvement de M tel que $\overrightarrow{OM} = S^{-1}(G)$. Déterminer le cône (C) de sommet O contenant la trajectoire Γ de M. Etablir que la normale à (C)en M (t) rencontre l'axe (O ; k) en un point H (t).

II.7. Les hypothèses étant celles de la question précédente, on cherche à déterminer la fonction θ de t pour que le mouvement de M s'effectue à une vitesse numérique ‖M'‖ constamment égale à 1.
a) Montrer que dans ce cas les vecteurs $\overrightarrow{MH}$ et M" sont colinéaires et de même sens.
b) Former l'équation différentielle (5) vérifiée par la fonction θ de t.

c) On pose $h = \sqrt{\dfrac{d\theta}{dt}}$; Montrer que h et θ vérifient l'équation différentielle $2\left(\dfrac{dh}{d\theta}\right)^2 + h^2 = 1$ (6)

d) Déterminer les solutions de (6) vérifiant en outre : $2\dfrac{d^2h}{d\theta^2} + h = 0$ (7)

Déterminer les fonctions θ de t correspondantes.

e) On considère, t décrivant R, le mouvement défini par :

$$\theta = \sqrt{2}\cdot \operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \qquad \overrightarrow{OM} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right)}(-u+k)$$

Soit γ la projection sur le plan (O ; i, j) de la trajectoire de M. Construire γ et déterminer ses asymptotes. Montrer qu'en tout point de γ la concavité de la courbe est tournée vers le point O.

TROISIEME PARTIE

On suppose donnée une application de l'intervalle I dans E : $t \to M(t)$, de classe C^∞, telle que la fonction M' appartienne à P_I. Soit λ une application de classe C^∞ de I dans R^*_+.

III.1. Etablir qu'il existe au moins une fonction $t \to P(t)$ de I dans E telle que : $P' = \lambda\, M' \times M''$

M et P étant ainsi définis, on note Γ (resp. Γ_1) la trajectoire de M (resp. de P). Ces deux courbes sont orientées dans le sens des t croissants et munies d'une origine.

On adopte les notations suivantes pour les deux mouvements :

Point mobile	M	P
Trajectoire	Γ	Γ_1
Abscisse curviligne	s	s_1
Vitesse numérique (positive)	$v = \dfrac{ds}{dt}$	$v_1 = \dfrac{ds_1}{dt}$
Courbure (positive)	c	c_1
Torsion	τ	τ_1
Vecteur unitaire de la tangente	T	T_1
Vecteur unitaire de la normale principale	N	N_1
Vecteur unitaire de la binormale	B	B_1

On rappelle les formules de Frenet (écrites ici pour Γ) :

$$\frac{dT}{ds} = cN \; ; \; \frac{dN}{ds} = -cT + \tau B \; ; \; \frac{dB}{ds} = -\tau N$$

III.2. Etablir les formules : $\| M' \times M'' \| = v^3 c$ et $W(M') = v^6 c^2 \tau$

III.3.a) Etablir que $P' \in P_I$.

b) Déterminer T_1, N_1, B_1 en fonction de T, N, B.

c) Calculer v_1, c_1, τ_1 en fonction de v, c, τ, λ. En déduire : $c\, c_1 = \tau\, \tau_1$.

III.4.a) On prend ici $\lambda = \dfrac{1}{v^2}$, c'est-à-dire $P' = \dfrac{M' \times M''}{M'^2}$

Montrer que la courbe Γ_1 a un rayon de torsion égal à 1 constamment.

b) Réciproquement, on se donne une application P de classe C^∞ de I dans E, telle que la trajectoire Γ_1 de P ait une torsion constante $\tau_1 = 1$. Soit Ω une application de classe C^∞ de I dans R^*_+.

Etablir qu'il existe une application M de I dans E, de classe C^∞, vérifiant les relations :

$$M' \times M'' = \Omega^2 P'$$
$$\| M' \| = \Omega$$

c) En déduire une méthode d'obtention de toutes les courbes de classe C^∞ à torsion constante non nulle.

III.5. On considère un repère orthonormal direct fixe $R = (O ; i, j, k)$
et l'on pose : $u = \cos\theta\, i + \sin\theta\, j$ $\qquad u_1 = -\sin\theta\, i + \cos\theta\, j$

Le point M décrit la courbe Γ définie par $\overrightarrow{OM}(\theta) = u(\theta) - \ln|\cos\theta|\, k$ où θ décrit l'intervalle $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

a) Déterminer les coordonnées de T, N, B dans la base (u, u_1, k) et calculer c et ι en fonction de θ.

b) Déterminer dans la base (u, u_1, k), les coordonnées du vecteur $\dfrac{M' \times M''}{M'^2}$

c) On définit une application P de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ dans E par $P' = \dfrac{M' \times M''}{M'^2}$ et $\overrightarrow{OP}(0) = -\dfrac{2}{3} j$

Déterminer les coordonnées cartésiennes de P dans le repère R. Déterminer la courbure et la torsion de la trajectoire Γ_1 de P au point de paramètre θ.

III.6. Les formules définissant le point P ci-dessus en fonction de θ gardent un sens pour tout θ réel. On définit ainsi une courbe C dont Γ_1 est un arc.

Construire les projections de C sur les trois plans de coordonnées (on précisera le sens de concavité). Effectuer un croquis perspectif de la portion de C correspondant à $\theta \in [0, 2\pi]$.

••••• FIN •••••