Étude de la dualité dans un espace affine euclidien.

Soit E_n un espace affine euclidien de dimension n associé à l'espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{E_n}$. Le produit scalaire est noté par simple juxtaposition : $\vec{u}\,\vec{v}$.

Pour tout sous-espace affine (sea) F de E_n, on note $\vec{F}$ la direction de F, et $\vec{F}^{\perp}$ l'orthogonal de $\vec{F}$ dans $\overrightarrow{E_n}$.

On fixe un point O de E_n et un réel $r > 0$.

Si le sea F ne passe pas par O, on note F^* l'ensemble des points N de E_n vérifiant :

$$\forall M \in F \quad \overrightarrow{OM}\ \overrightarrow{ON} = r^2$$

F^* est appelé le *dual* de F de pôle O et de puissance r^2, ou le sous-espace *polaire* de F par rapport à la sphère de centre O et de rayon r.

1) Soit H le projeté orthogonal de O sur F, et soit K l'inverse de H par rapport à O de puissance r^2, c'est-à-dire le point de la droite (OH) défini par $\overline{OH}\ \overline{OK} = r^2$. Montrer que F^* passe par K et ne passe pas par O.

2) Montrer que F^* est un sea de direction $\vec{F}^{\perp} \cap \overrightarrow{OH}^{\perp}$. Quelle est donc sa dimension, si F est de dimension k ?

3) Qu'est-ce que F^{**} ?

4) Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des sea de E_n ne passant pas par O. Montrer que l'application D : $\begin{cases} \mathcal{F} \to \mathcal{F} \\ F \mapsto F^* \end{cases}$ est une bijection renversant les inclusions, c'est-à-dire que

$$F \subset G \Leftrightarrow F^* \supset G^*$$

et que la restriction de D à $\mathcal{F}_k$ ensemble des sea ne passant pas par O, définit une bijection de $\mathcal{F}_k$ sur $\mathcal{F}_{n-k-1}$.

5) Montrer que si $A \in E_n$, $\{A\}^*$ est l'hyperplan orthogonal à (OA) passant par l'inverse B de A par rapport à O et de puissance r^2. On notera cet hyperplan A^* au lieu de $\{A\}^*$, et de même, le dual d'un hyperplan sera considéré comme un point et

non comme un singleton. La relation du 4) s'écrit alors, pour un hyperplan H et un point M :

$$M \in H \Leftrightarrow H^* \in M^*$$

6) Montrer que si $d(F,O)$ (distance de F à O) tend vers 0, alors $d(F^*,O)$ tend vers $+\infty$; dans quel cas ces distances sont-elles égales ?

7) Cas où $n = 2$. On rapporte le plan à un repère orthonormé d'origine O. Quelle est l'équation cartésienne de la droite duale du point $A(a,b)$?

Dans la suite du problème, on se place dans le cas $n = 3$. L'espace E_3 est rapporté à un repère orthonormé d'origine O.

8) a) Quelle est l'équation cartésienne du plan dual du point $A(a,b,c)$?

b) Montrer que si un plan P est défini par 3 points non alignés A,B,C, le point dual P^* est défini par $\overrightarrow{OP^*} = a^2 \dfrac{\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}}{\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{OA}}$; on remarquera que cette expression, bien que faisant intervenir le produit vectoriel, ne dépend pas de l'orientation de l'espace.

c) Soient A,B deux points non alignés avec O ; montrer que $(AB)^* = A^* \cap B^*$.

d) Soit D une droite ne passant pas par O ; définir géométriquement la droite duale D^*.

9) Pour obtenir le dual d'un polyèdre P on prolonge ses arêtes en des droites, et ses faces en des plans ; ayant fixé un point O et un réel r le polyèdre dual P^* est, s'il existe, le polyèdre qui a pour sommets les points duaux des faces prolongées de P, pour arêtes prolongées les droites duales des arêtes prolongées de P et pour faces prolongées les plans duaux des sommets de P.
Faire une figure en perspective avec les arêtes d'un cube, et les arêtes du dual du cube par rapport à sa sphère circonscrite.