SOLUTION de AIR 2001 MP

1. Comme l'axe OX est axe de symétrie évident de $S \cap OXY$, si cette courbe contient une droite, celle-ci est de la forme $X = a$ et coupe Ox au point $(a, 0)$ tel que $a(a^2 - 1) = 0$.

On vérifie alors que $X(X^2 + Y^2 - 1) + Y^2 = (X + 1)(X^2 + Y^2 - X)$. Donc $S \cap OXY$ est formée de la droite $X = -1,\ Z = 0$ et du cercle $X^2 + Y^2 - X = 0,\ Z = 0$, qui est le cercle de diamètre OA avec $A = (1, 0, 0)$.

2. La transformation $(X, Y, Z) \mapsto (-X, Z, Y)$ échange les courbes $S \cap OXY$ et $S \cap OXZ$. Donc $S \cap OXZ$ est formée de la droite $X = 1,\ Y = 0$ et du cercle $X^2 + Z^2 + X = 0,\ Y = 0$ (de diamètre OB avec $B = (-1, 0, 0)$)

3. • Soit $M = (X, Y, Z)$ un point de $\mathbb{R}^3$ tel que $|X| > 1$. Alors $X^2 + Y^2 + Z^2 - 1 > Y^2 + Z^2$.
Si $X > 1$, alors $X(X^2 + Y^2 + Z^2 - 1) + Y^2 - Z^2 > (X + 1)Y^2 + (X - 1)Z^2 > 0$, donc $M \notin S$.
Et si $X < -11$, alors $X(X^2 + Y^2 + Z^2 - 1) + Y^2 - Z^2 < (X + 1)Y^2 + (X - 1)Z^2 < 0$, donc $M \notin S$.
Donc si $M \in S$, alors $X \in [-1, 1]$.
• Si $X \in \{0, 1, -1\}$, il existe au moins un point de S d'abscisse X (à savoir O, A, B par ex.)
Sinon, soit $X \in]-1, 1[$ et $X \neq 0$; alors $(X, Y, Z) \in S$ SSI Y, Z vérifient $\dfrac{Y^2}{X(1-X)} - \dfrac{Z^2}{X(1+X)} = 1$. On reconnaît là l'équation d'une hyperbole du plan OYZ, laquelle est non vide. Donc tout $X \in [-1, 1]$ est l'abscisse d'au moins un point de S.
• Enfin, la section de S par $X = a$ avec $0 < |a| < 1$ est une hyperbole comme on vient de le voir. Laquelle se dégénère en deux droites $Y = Z,\ Y = -Z$ quand $a = 0$, en une droite (double) quand $a = \pm 1$ (à savoir les droites vues en 1. et 2.)

4. Quand $M = (X, Y, Z)$ parcourt une droite, X parcourt $\mathbb{R}$ sauf si cette droite est incluse dans un plan $X = a$. Donc si une droite est incluse dans S, elle doit être dans un plan $X = a$. Or, d'après l'étude du 3., les seuls cas possibles sont $a = 0, 1, -1$. Donc les droites incluses dans S sont les droites :
$D_1 = \{X = -1,\ Z = 0\},\ D_2 = \{X = 1,\ Z = 0\},\ D_3 = \{X = 0,\ Y = Z\}$ et $D_4 = \{X = 0,\ Y = -Z\}$

5. La symétrie par rapport au plan $X = 0$ est la fonction $(X, Y, Z) \mapsto (-X, Y, Z)$ et la rotation d'axe OX d'angle $\pi/2$ est définie par $(X, Y, Z) \mapsto (X, -Z, Y)$; donc $f(X, Y, Z) = (-X, -Z, Y)$. Il est alors clair que f est bijective et conserve S.

6. Le plan $X = 0$ étant le seul plan qui coupe S selon deux droites distinctes, ce plan est invariant par toute isométrie g qui conserve S. De plus le point O qui est à l'intersection de ces deux droites doit aussi être conservé. Ainsi $g(O) = 0$ et $(1, 0, 0)$ est vecteur propre de l'appl. linéaire associée $\widehat{g}$; et la valeur propre associée est ± 1 (car $\widehat{g}$ est une isométrie). Le plan orthogonal à ce vecteur propre (à savoir OYZ) est aussi stable par $\widehat{g}$. Donc g est de la forme $g(X, Y, Z) = (\pm X, aY + bZ, cY + dZ)$.
Par ailleurs l'image par g de la droite $D_1 = \{X = -1,\ Z = 0\}$ est une des droites incluses dans S et est formée des points $(\pm 1, aY, cY)$ où Y parcourt $\mathbb{R}$. Donc ou bien $g(D_1) = D_1$ (et alors $c = 0$) ou bien $g(D_1) = D_2$ (et alors $a = 0$).
Sachant que les lignes de la matrice de g forment un système orthonormal, le premier cas donne $g(X, Y, Z) = (\pm X, \pm Y, \pm Z)$ et le second $g(X, Y, Z) = (\pm X, \pm Z, \pm Y)$. Ce sont des formes nécessaires. On vérifie que les seuls cas qui conviennent sont :
$g(X, Y, Z) = (X, \pm Y, \pm Z)$ (**identité, symétries autour de OXY ou de OXZ, et demi-tour d'axe OX**)
et $g(X, Y, Z) = (-X, \pm Z, \pm Y)$ (**composées de f avec les 4 précédentes**)

7. Le plan $kZ = X + 1$ contient la droite D_1, donc D_1 fait partie de l'intersection avec S. On cherche donc à mettre l'équation de S sous une forme favorable, par exemple : $(X + 1)(X^2 + Y^2 + Z^2 - 1) + 1 - X^2 - 2Z^2$.
On voit alors que $M = (X, Y, Z) \in S \cap \{kZ = X + 1\} \iff kZ = X + 1,\ Z\big[k(X^2 + Y^2 + Z^2 - X) - 2Z\big] = 0$
Ceci montre que l'intersection cherchée se décompose en une droite (la droite D_1) et en un cercle (éventuellement réduit à un point ou vide), à savoir l'intersection du plan avec la sphère $k(X^2 + Y^2 + Z^2 - X) - 2Z = 0$.
Bien sûr, pour $k = 0$, la sphère se dégénère mais on a déjà vu que $S \cap \{X = -1\}$ est réduite à D_1. Sinon la sphère coupe le plan SSI la distance d du centre $\Omega = (1/2, 0, 1/k)$ au plan est inférieure au rayon R de la sphère. Or $d^2 = \dfrac{(3/2 - 1)^2}{1 + k^2} = \dfrac{1}{4(1 + k^2)} < \dfrac{1}{4}$ et $R^2 = O\Omega^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{k^2} > \dfrac{1}{4}$.
Bref, sauf pour $k = 0$, l'intersection cherchée est formée d'un cercle et de la droite D_1.
Comme f conserve S et échange les plans $kZ = X + 1$ et $kY = 1 - X$, l'intersection de S avec $kY = 1 - X$ est formée d'un cercle et de la droite D_2 (cercle vide si $k = 0$).

8. De même, soit $M = (X, Y, Z)$ appartenant à $kX = Z - Y$. Ce point est aussi sur S SSI $X\big[X^2 + Y^2 + Z^2 - 1 - kY - kZ\big] = 0$. On voit encore que cette intersection se décompose en la droite $D_3 = \{X = 0,\ Y = Z\}$ et

un cercle (section de la sphère $X^2+Y^2+Z^2-1-kY-kZ=0$ et du plan). Ce cercle est non vide car il contient les points $(0,y,y)$ avec y solution de $2y^2-2ky-1=0$ (équation qui a toujours 2 racines distinctes). Ici aussi, f échange les plans $kX=Z-Y$ et $kX=Z+Y$, donc même type d'intersection (avec D_4 au lieu de D_3) pour les plans $kX=Z+Y$.

9. Le point $C=(1/2,1,3/2)$ se trouve dans les plans $Z=X+1,\ Y/2=1-X,\ X=Z-Y,\ 5X=Z+Y$ et sur la surface S; donc C appartient aux cercles sections de S par ces 4 plans.

10. $(x,y,0)$ est projection d'un point de S SSI il existe z tel que (E) $(x-1)z^2+x(x^2+y^2-1)+y^2=0$. Et on a vu au 3. que $x\in[-1,1]$.
Si $x=\pm1$, on sait que pour tout y, $(x,y,0)$ est sur S, donc convient.
Si $x\in]-1,1[$ l'équation E admet des solutions en z SSI $x(x^2+y^2-1)+y^2\geq 0$ (car $x-1<0$.
Ou encore (cf 1.) SSI $(x+1)(x^2+y^2-x)\geq 0$. Or $x+1>0$, donc pour $|x|<1$, la condition est que (x,y) soit extérieur au cercle trouvé en 1.
Bilan : la projection de S sur OXY est formée de D_1 et du complémentaire du disque ouvert limité par le cercle vu en 1.

11. La courbe cherchée a pour équation $(1+X)Y^2=(1-X)(X+\frac{1}{2})^2$. Elle est donc constituée du graphe de $h:x\mapsto\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}(x+\frac{1}{2})$ et de son symétrique par rapport à OX.
$\frac{h'(x)}{h(x)}=\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{x+1/2}$; donc $h'(x)$ est du signe de $\frac{1}{2}-x-x^2$, trinome qui a une seule racine α dans $]-1,1[$. Et $\alpha\in]0,1[$. Donc h croît sur $]-1,\alpha[$ de $-\infty$ à $h(\alpha)$ en passant par $0=h(1-1/2)$, puis décroît sur $]\alpha,1[$ vers $0=h(1)$. Bien sûr, la tangente en $x=1$ est verticale, et celle en $x=-1/2$ s'obtient en cherchant la limite de $\dfrac{h(x)}{x+1/2}$ quand $x\to-1/2$: c'est la droite de pente $\sqrt{3}$.

12. grad $S=\big(3X^2+Y^2+Z^2-1,\ 2Y(X+1),\ 2Z(X-1)\big)$ ne peut s'annuler que pour :

$$X=1,\ Y=0 \text{ ou } X=-1,Z=0 \text{ ou } Y=Z=0$$

Pour les 2 premiers cas, $\dfrac{\partial S}{\partial X}>0$, et le 3ème exige $3X^2=1$; mais alors $S(X,0,0)=X(X^2-1)\neq 0$. Donc en tout point de S, le gradient de la fonction S est non nul.

13. Les points de la droite M_0M_1 sont de la forme $M_t=(1-t)M_0+tM_1$. Un tel point est sur S SSI $S(M_t)=0$, équation du 3ème degré en t à coefficients rationnels, dont on connaît deux racines ($t=0$ et $t=1$). Donc elle admet une tierce racine θ et la somme $0+1+\theta$ est rationnelle. Donc $\theta\in\mathbb{Q}$. Il est donc clair que M_θ est à coordonnées rationnelles.