L.G.Vidiani 64 rue de l'EUROPE 21121 FONTAINE LÈS DIJON TEL : 03 80 56 65 53 (zip TEX juelq.tex)
Adresse email Internet : *lg_vidiani@ipac.fr*

Le th or me de JUEL et la surface de CLEBSCH

(version Zip II : 20 01 04 15h35)

(Ceci n'est qu'un document de travail pour un futur article, il reste de nombreux points pr ciser, am liorer et finir)

Introduction.

Lorsque j' tais jeune d butant (il y a h las bien longtemps), une phrase d'un petit livre d'Andr DELACHET [0], m'avait frapp : “La surface du troisi me ordre (non r gl e) contient au plus vingt-sept droites. Une telle surface en argent, non analytique, a t offerte JUEL pour son jubil scientifique ; elle comportait les 27 droites.”

(On dit qu'une surface est r gl e, si elle peut tre engendr e, comme les c nes, les cylindres, les cono des,.., par des droites)

De multiples exercices d'oraux ou de Travaux Pratiques ou de colles, en classe de math matiques sp ciales, proposent de d montrer ce r sultat sur des surfaces cubiques particuli res et maintinrent mon int r t pour cette question. (voir la bibliographie [E1]...[E10])

Dans le livre “les nombres remarquables” de Jean Brette cit en r f rence [D2], l'entr e **27** il est dit que c'est SALMON qui en 1884, d termina le nombre maximum de droites sur une surface cubique (c'est dire dont l' quation est de degr 3 par rapport aux coordonn es), non r gl e, apr s que CAYLEY e t d montr qu'il tait fini. Ce qui provoqua une remarque admirative de SYLVESTER (Cayley et Sylvester “les jumeaux des invariants” comme le dit E.T. BELL) “Avec la m me raison, qu'Archim de a sur sa pierre tombale, grav s un cylindre, un c ne et une sph re, nos distingu s concitoyens pourraient laisser des dispositions testamentaires pour que l'eikosiheptagramme soit grav e sur les leurs”.

(L'eikosiheptagramme est la figure form e par les 27 droites d'un cubique non r gl e).

Voulant en savoir plus sur l'objet offert Juel, j'entrepris d but 1985 des recherches et finit par tre dirig sur l'Institut Math matique de Copenhage et apr s quelques changes je re us le 23 ao t 1985 une lettre et des photos, envoy es par le professeur Thoger Bang professeur l'Universit de Copenhage. Ces photos que je joins cet article feraient une bonne couverture pour Quadrature, avec le titre “Un Eikosiheptagramme ?” (ainsi que le fichier gif de la surface de Clebsch). C' tait un cadeau du professeur J. HJELMSLEV Christian JUEL pour son 70 me anniversaire et son jubil scientifique (25 janvier 1925). La pi ce fut cisel e par le joaillier bien connu Evald NIELSEN de COPENHAGE. Apr s la mort de JUEL, l'objet f t donn l'Institut Math matique de COPENHAGE, o le professeur BANG l'a, suite ma demande, retrouv e, nettoy e et polie. La grandeur totale (diam tre) est de 14 centim tres et le poids 85 grammes. Au verso trois droites s parent les indications : Til C. JUEL ; Fra J. HJELMSLEV ; 25 janvier 1925. Robert F rr ol l'a mis sur son site. (*)

Mais en fait le bijou offert Juel, ne comporte que trois droites et sa forme n'a rien voir avec celle de la surface de Clebsch, bien que sa forme soit connue, sans logiciel informatique, puisque la firme Martin Schilling Leipzig diffusait depuis 1890 un mod le en pl tre, dont un exemplaire doit tre dans les caves de l'Institut Henri Poincar , puisqu'il y en avait dans toutes les universit s, y compris aux USA.

On trouvera tous les renseignements biographiques (et des portraits) sur CAYLEY, JUEL, SALMON, SCHLÄFLI, SYLVESTER, sur le site [S7].

Aussi est-ce avec un int r t renouvel , que je lus dans la gazette des math maticiens 32 de janvier 87 pages 84-85, sous la plume de mon coll gue et ami Fran ois Ap ry (de l'Universit de Mulhouse) un article annon ant l' dition, par la maison Vieweg pour f ter son bicentenaire, de deux tomes de Mathematical Models (Vieweg 1986) [D6] avec 132 photographies de surfaces en pl tre. J'ai m me eu en main en 1991 le pl tre de la surface de Clebsch, mais l'emballage insuffisant de l'exp diteur, et la douceur des manipulations postales, a fait qu'il n'est pas arriv intact et que j'ai t oblig de le renvoyer et de me faire rembourser (105 FF ce qui f t fait sans probl me, contrairement ce qui se passe en France o il aurait fallu donner des tas d'explications....)

Mais ce n'est pas tout : en f vrier 1999, mon coll gue et ami Alain JUHEL (sic avec H) trouva sur le Web (mais le site semble maintenant ferm) un fichier 27cubic.gif qui reproduit la surface de Clebsch, avec en prime, c'est ce qui fait son int r t, le trac des 27 droites formant le double six de Schl fli (voir plus loin) ; fichier dont je joins un tirage papier (qui ferait une excellente couverture pour Quadrature : ou mieux, car le dessin est fait en suivant l'article et avec la surface de Hunt, avec l'image faite par Esculier en utilisant le logiciel libre Povray (**)

(*) *http://www.mathcurve.com/surfaces/clebsch/clebsch.shtml,*

Le lecteur d sireux de se rincer l'oeil de splendides illustrations, de s'abreuver l'esprit de remarques et de liens constructifs peut aussi aller http://www.mathcurve.com/surfaces/cubic/cubic.shtml

(**) *Les explications pour obtenir les instructions Povray partir de Maple sont la fin du fichier texte de la page “Povray/Clebsch” du site magnifique d'Alain Esculier, mis dans la bibliographie. De m me le fichier permettant de calculer les double six, les points d'intersection, les points d'Eckardt sont dans la page “Maple/calculsClebsch”. Une*

C'est la m me repr sentation que dans Mathematical Models, et c'est pour les raisons de pr sence des droites, la meilleure repr sentation de cette surface. Le Palais de la D couverte, a longtemps expos un tel mod le en platre, mais il n'est plus maintenant visible du public, stock sans doute dans un placard des combles ou des caves, connu des seuls initi s, o il prend sans doute la poussi re ?

Il y a m me un sculpteur aux USA, qui a r alis une telle surface avec un gros morceau de b ton et trac les 27 droites dessus, voir par exemple [S10] ou rechercher avec google avec les mots concrete (b ton) 27 lines et cubic surfaces, on peut aussi taper "Kaenders" sous google, pour voir un tel objet rig   Dusseldorf en 1999 pour comm morer les 150 ans de la naissance de Klein.

Le but de cet article est de pr ciser le lien entre les composantes projectives et les coordonn es ordinaires, incidemment d' voquer l' quation pentah drale, et d' tablir pourquoi elle est non r gl e (quelles sont les cubiques r gl es, y a t-il une quation aux d riv es partielles des surfaces r gl es ?), la pr sence maximale des 27 droites, l'explication du double six de Schl fli, les dix points d'ECKARDT, et d'indiquer des pistes ou des r f rences ou des demandes sur le calcul du cardinal du groupe qu'elles engendrent, la recherche des sym tries et le d compte des trous de la surface).

Remarquons enfin que la recherche des droites d'une surface, outre le lien avec diff rentes th ories (Groupes, g om trie symplectique,....) n'est pas artificielle, elle permet par exemple de rechercher les coniques et en particulier les cercles d'une surface cubique (par exemple $z(x^2+y^2+z^2)-a(x^2-y^2)-a^2z=0$) et plus g n ralement des cyclides de Dupin, puisque tout plan contenant une conique de cette surface contient une courbe de degr $3-2=1$, c'est dire une droite ! (*)

---

(1) Relations entre composantes projectives et coordonn es ordinaires, justifiant les quations les plus courantes de la surface de CLEBSCH

Annonc e par Sylvester (1851) et Steiner (*) et d montr e par Clebsch en 1861, l' quation g n rale d'une cubique en composantes pentah drales est $a_0x_0^3+a_1x_1^3+a_2x_2^3+a_3x_3^3+a_4x_4^3=0$, o les x_i sont des formes lin aires en les quatre composantes projectives, et $x_0+x_1+x_2+x_3+x_4=0$. (pr ciser : on peut passer de l'une l'autre quation (Bib D'Hunt) Salmon : Analytische Geometrie des Raumes, II, german translation by W. Fielder, Teubner : Leipzig 1898 p 403)

Aussi bien le dictionnaire Weisstein [D5] l'entr e Clebsch, que le site du math maticien italien Todesco [S2] que l'on trouve en demandant google "superficie diagonale di Clebsch, s'ils partent de la m me quation pentah drale $x_0^3+x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3=0$ et $x_0+x_1+x_2+x_3+x_4=0$ ne donnent pas les relations entre les coordonn es ordinaires et les composantes projectives x_0,x_1,x_2,x_3. La donn e du plan de l'infini comme dans Weisstein [D5], ne suffit pas, loin de l ! pour d duire de l' quation pentah drale, celle en coordonn es ordinaires obtenue par Hunt. La logique interne, et les raisons strat giques du choix des formules exprimant x,y,z en fontion des composantes projectives x_0,x_1,x_2,x_3, en particulier celui du plan de l'infini, (modification de la forme distance finie, recherche de sym tries, rejet de points singuliers l'infini ?...) qui pr side ces changements, nous chappent, et nous int resseraient au plus haut point. En l'absence de la transparence d'un choix pens , labor , raisonn , expliqu , justifi on peut tout imaginer : l'humeur du moment, la coincidence avec une eclipse ou une aurore bor ale, la vitesse du vent, l' paisseur de brouillard.

L' quation ordinaire de la surface de Clebsch donn e par le dictionnaire Weisstein [D5] est :

$$\boxed{\mathbf{81(x^3+y^3+z^3)-189(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y)+54xyz+126(xy+yz+zx)-9(x^2+y^2+z^2)-9(x+y+z)+1=0}}$$

Or pour obtenir cette quation, partir de l' quation pentah drale, il faut savoir (et ce n'est pas vident ni donn : la seule piste (et encore non directement explicite) qui m'a permis de le trouver (avec Maple et un fil directeur, et plus des astuces techniques qu'une argumentation strat gique) est de taper sous google "Clebsch cubic et apr s avoir ssay tous les autres, de tomber sur le dernier site [S4] de la derni re page de Google. o dans le chapitre 4 page 93 la l gende de la figure 4.4 donne un renvoi des formules tr s indirectes, voire herm tiques, pages 94 et 97) qu'il faut poser :

$\boxed{\mathbf{x=\frac{x_1+x_2+x_3}{6x_0+6x_1+6x_2+3x_3}}}$ $\boxed{\mathbf{y=\frac{x_0+x_2+x_3}{6x_0+6x_1+6x_2+3x_3}}}$ $\boxed{\mathbf{z=\frac{x_0+x_1+x_2}{6x_0+6x_1+6x_2+3x_3}}}$

Puis une inversion la main, ou mieux par maple avec solve donne

$x_0=-\frac{1}{2}\frac{x_3(9x-3y-3z-1)}{3x+3y+3z-1}$, $x_1=-\frac{1}{2}\frac{x_3(-3x+9y-3z-1)}{3x+3y+3z-1}$, $x_2=-\frac{1}{2}\frac{x_3(-3x-3y+9z-1)}{3x+3y+3z-1}$

Prenant alors $x_3=-\frac{1}{\sqrt[3]{6}}(6x+6y+6z-2)$ et reportant (au moyen de subs de Maple) dans l' quation en composantes projectives x_0,x_1,x_2,x_3 de la surface de Clebsch : $x_0^3+x_1^3+x_2^3+x_3^3-(x_0+x_1+x_2+x_3)^3=0$, on obtient (directement,

---

animation de la surface de Clebsch et ses 27 droites est visible et t l chargeable dans le r pertoire Divers/Animations de Clebsch.

(*) *Potron (Hermann 1926) exercices de CDI num ro 79 p 22, licence Besan on 1909, dont l' nonc est repris sans le dire dans de nombreux livres d'oral...*

(*) *Stylis en "ce cel bre sphynx", par Luigi Cremona, car il donnait ses th or mes sans d monstration, ou tout au plus un plan herm tique.*

sans division par -6 d'o mon inclusion (par pure coquetterie !) du $-\sqrt[3]{6}$) l' quation sous la forme donn e par le dictionnaire Weisstein [D5] (obtenue par Hunt).

(**)

L' quation donn e sur le site Todesco [S2] est :

$$\boxed{\mathbf{16x^3 + 16y^3 - 31z^3 + 24x^2z - 48x^2y - 48xy^2 + 24y^2z - 54\sqrt{3}z^2 - 72z = 0}}$$

On pose (avouez que les raisons herm tiques de ce choix de formules ne sont pas videntes, non plus que leur reconstitution qui m'a demand un certain temps, car elles n' taient pas donn es et poser $\frac{X}{T} = \frac{x}{1}$, quand T n'est pas connu, ni X, n'aide pas trouver X...)

$$\boxed{\mathbf{x = \frac{(3-\sqrt{3})x_0+(-3+\sqrt{3})x_1-2\sqrt{3}x_2}{6x_0+6x_1+6x_2-6x_3}}} \quad \boxed{\mathbf{y = \frac{(-3+\sqrt{3})x_0+(3+\sqrt{3})x_1-2\sqrt{3}x_2}{6x_0+6x_1+6x_2-6x_3}}} \quad \boxed{\mathbf{z = \frac{8\sqrt{3}(x_0+x_1+x_2)}{6x_0+6x_1+6x_2-6x_3}}}$$

Une inversion la main, ou au moyen de solve de Maple donne :

$x_0 = -x_1\frac{-2x-2x\sqrt{3}+2y\sqrt{3}-z-2y}{2x-2x\sqrt{3}+2y\sqrt{3}+z+2y}$, $x_2 = -x_1\frac{4y+4x-z}{2x-2x\sqrt{3}+2y\sqrt{3}+z+2y}$, $x_3 = x_1\frac{3z-4\sqrt{3}}{2x-2x\sqrt{3}+2y\sqrt{3}+z+2y}$.

Pour chasser le d nominateur, nous prenons $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{12}(2x - 2x\sqrt{3} + 2y\sqrt{3} + z + 2y)$ et nous obtenons

$$\begin{cases} x_0 = \frac{\sqrt{3}}{12}(2x + 2x\sqrt{3} - 2y\sqrt{3} + 2y + z) \\ x_1 = \frac{\sqrt{3}}{12}(2x - 2x\sqrt{3} + 2y\sqrt{3} + z + 2y) \\ x_2 = \frac{\sqrt{3}}{12}(-4x - 4y + z) \\ x_3 = \frac{\sqrt{3}}{12}(3z - 4\sqrt{3}) \end{cases}$$

Reportant ces formules (au moyen de subs de Maple) dans l' quation en composantes projectives x_0, x_1, x_2, x_3 de la surface de Clebsch : $x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - (x_0 + x_1 + x_2 + x_3)^3 = 0$, on obtient bien l' quation ordinaire : $\mathbf{16x^3 + 16y^3 - 31z^3 + 24x^2z - 48x^2y - 48xy^2 + 24y^2z - 54\sqrt{3}z^2 - 72z = 0}$

Avant de continuer, cherchons quelles peuvent tre les surfaces cubiques r gl es ?

---

(2) Recherche des seule surfaces cubiques r gl es.

Il y a d'abord les cas vidents exotiques et parasites, de surface cubiques d compos es ($3 = 1+1+1$ ou $3 = 1+2$) en trois plans, ou un plan et une quadrique propre. On sait que toute quadrique propre est r gl e et comporte deux familles de droites, celles ci pouvant tre imaginaires (comme par exemple pour la sph re), les seules quadriques propres droites r elles tant l'hyperbolo de une nappe (chateau d'eau de Fedala, tours de centrales thermiques : l'existence des droites permet de les construire avec coffrage et b ton pr contraint), et le parabolo de hyperbolique (tout bonne planche fauss e).

Hors ces cas vidents, envisageons celui d'une vari t S, non d compos e d'ordre 3.

Soit g une g n ratrice g n rique ; soit π un plan tangent S, contenant g.

Soit $C_{g,\pi}$ le reste de son intersection avec S, qui est donc une courbe plane (dans π) d'ordre $3-1=2$, donc une conique.

$C_{g,\pi}$ et g ont en commun un certain nombre de points, doubles pour la section compl te. L'un d'eux est le point de contact de S avec π. Les autres sont n c ssairement doubles pour la surface, puisque un plan ne peut tre tangent en deux points d'une m me g n ratrice (r sultat classique sur les surfaces r gl es non d veloppables : le plan tangent en un point d'une g n ratrice "tourne" autour de cette g n ratrice, lorsque ce point parcourt toute cette droite) sauf si S est d veloppable (c ne, cylindre, ou engendr par les tangentes une courbe gauche appel e l'ar te de rebroussement de la d veloppable).

S est donc soit un c ne (du troisi me degr), le cas du cylindre comme nous sommes en espace projectif est un cas particulier, la courbe double est alors r duite dans ce cas un singleton r duit au sommet du c ne, soit une surface engendr e par les tangentes une courbe gauche (si c'est une courbe plane, la surface engendr e est incluse dans un plan).

Il est bien connu (Valiron II p140, Berger p411, Favard p201) que l'ar te de rebroussement d'une surface r gl e d veloppable non conique est une courbe double (de points singuliers de la surface).

Donc hors du cas conique, une surface r gl e cubique, ou alg brique d'ordre $n \geq 3$, car le raisonnement pr c dent est g n ralisable, a une courbe double K, ayant au moins deux points.

Montrons que dans le cas cubique, cette courbe double est une droite !

D'abord la droite AB coupant S en quatre points (deux en A, et deux en B), est incluse dans S. Notons (R) ce type d'argument, pour qu'une droite soit dans S, car nous allons l'utiliser plusieurs fois, en rempla ant ventuellement A et B par d'autres points de K.

Supposons que K ne soit pas la droite AB, elle contiendrait un point I hors de la droite AB. Par (R), les droites IA et IB seraient dans S.

(**) *Pour respecter les notations des indications du chapitre 4 de Hunt p 93, dans le calcul en Maple juel.mws, les y_i sont les x_{i-1}.*

M tant un point quelconque de l'arc IA, puis IB de K, (R) implique que toutes ces droites IM sont dans S.

Donc K entre A et B (que l'on peut y prendre "extr maux") est plane, puisque toutes ces droites IM sont dans "le" plan tangent la nappe de S qui contient I (densit et continuit).

Une s cante dans ce plan aux droites IA et IB, sont galement dans S par le raisonnement (R), puisque rencontrant S en six points (ceux sur IA et sur IB est les doubles sur les arcs de K renontr s d'apr s le th or me des valeurs interm diaire.

Donc S contiendrait tout le plan tangent en I, donc serait d compos e, ce qui est cart .

(R) prouve que la droite AB est dans S, parce que les trois quadriques, (une quadrique dans l'espace projectif est toujours r gl e) permettant de d terminer les points doubles de S, d' quations $f'_x = f'_y = f'_z = 0$, contenant tout le segment AB contiennent, toutes la droite AB, qui est donc double : K est donc une droite double.

(Toute simplification, critique constructive de ce raisonnement permettant de montrer que la courbe double K est une droite, m'int resserait au plus haut point, car les arguments que j'ai trouv s (entre 1890 et 1925) me semblaient avoir une affirmation trop rapide. C'est sans doute pour cela qu'Abhyankar, organise sa classification d'embl e en occultant cette preuve, puisqu'il suppose que les cubiques ont une droite double)

R ciproquement, toute surface cubique contenant une droite double K est r gl e, car un plan quelconque contenant K, coupant S suivant une courbe du troisi me degr , qui contient d ja K compt e deux fois : le reste de l'intersection est une courbe de degr $3 - 2.1 = 1$ c'est donc une droite : chaque plan contenant K coupe S suivant une g n ratrice de S qui est donc r gl e.

Mais quelles sont, les cat gories de surfaces r gl es d'ordre 3 ? Nous avons vu qu'il les y a les c nes base cubique (qui peut avoir un point double tangentes diff rentes, ou tangente unique de rebroussement. Les classifications que j'ai trouv es en particulier dans les travaux de Salmon ne me convainquaient pas, car il ou bien il manquait un cas (que d'ailleurs Cayley a signal Salmon, et qui est le cas sp cial d'Abhyankar) ou des tapes dans les preuves me semblaient occult es. Je restais un mois et demi, ne pas avancer, bien que je ne reste pas inactif, lorsque par des interrogations sur le web, du style "ruled cubic" je tombais sur des articles sans d monstrations mais qui avaient dans leur bibliographie Abhyankar, savant math maticien comptemporain (il a m me un site), que nous voquerons aussi dans le paragraphe donnant une repr sentation param trique des surfaces cubiques non r gl es. À cause d'une faute de r f rence, le d lai pour obtenir cet article fut long. Mais alors quelle surprise, quelle clart , et surtout une classification o les deux principaux cas non coniques, ont des quations tr s similaires. Je vous incite d'ailleurs cette occasion d'avoir toujours, comme je l'ai eu toute ma vie, ce principe : aller tout de suite l'auteur d'une th orie (pour les distributions : Schwartz, etc...), car lui seul a une vue d'ensemble et la clart d'exposition de son invention.

Aussi je vous renvoie aux pages 455-467 de son article donn en bibliographie.

Je vais me contenter de donner sa classification et l'exploiter.

Abhyankar choisit un rep re projectif o la droite double soit d' quations $X = 0$, $Y = 0$, et s'il y a (il peut ne pas il y en avoir) un point singulier suppl mentaire P il est obligatoirement sur la droite double et on impose qu'il soit dans le plan $T = 0$.

Alors toutes les surfaces cubiques ayant cette droite double K, peuvent une transformation projective pr s se ramener aux quatre formes suivantes non projectivement quivalentes.

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{F_1 : Y^3 + XYT + X^3 = 0} & \textbf{c ne de sommet P "nodal"} \\ \mathbf{F_2 : Y^3 + X^2T = 0} & \textbf{c ne de sommet P "cuspidal"} \\ \mathbf{F_3 : Y^3 + XYT + X^2Z = 0} & \textbf{cubique sp ciale, sans droite simple d'appui} \\ \mathbf{F_4 : Y^3 + XYT + X^2Z + Y^2T = 0} & \textbf{cubique non sp ciale, droite simple d'appui } \begin{cases} \mathbf{X - Y - T = 0} \\ \mathbf{Y + Z = 0} \end{cases} \end{cases}}$$

Nodal signifie que la base du c ne a un point double tangentes distinctes,

Cuspidal signifiant que la base du c ne a un point double tangente de rebroussement.

F_3 a en outre une seule g n ratrice associ e chaque point de la droite double K. Cette surface est souvent appel e surface (r gl e) de Cayley. Segr a d montr (p141) qu'elle tait limite des autres cas, lorsque la droite simple tendait vers la droite double. Brundu a montr en 1991 que c' tait le seul type de surface cubique, dont l' quation ne pouvait pas se mettre sous la forme d'un d terminant d'ordre 3, dont les coefficients seraient des formes lin aires. Ce ne peut tre un cono de, car si elle l' tait, il y aurait une droite simple d'appui pour toutes les g n ratrices : la droite de l'infini du plan directeur. La d nomination sous ce vocable donn e dans Kn rrer und Miller Math. Z. 195 1997, page 61 est donc interpr ter.

F_4 a deux g n ratrices distinctes associ es chaque point de la droite double K.

On remarque la concision de cette classification, qui aboutit m me au fait que les premiers membres des quations de F_3 et F_4 ne diff rent que d'un terme suppl mentaire dans le cas non sp cial !

Avant d'exploiter cette classification, pour cataloguer des surfaces cubiques, posons nous la question l gitime, du lien entre la ligne double d'une surface r gl e, et sa ligne de striction ventuelle. Il est bien connu par exemple que la ligne de striction d'un cono de droit (c'est dire que l'axe est orthogonal au plan directeur) est son axe, qui est ligne de croisement donc ligne double par exemple dans le cas du cono de de Pl cker, mais est-ce g n ral ? La r ponse est positive : Brundu cite page 312 un article r cent (2001) d'un japonais Izumiya qui d montre (page 4) que tout point de la ligne double est inclus dans la ligne de striction. Cet article se trouve m me sur le web, et contrairement la double extension de son fichier, il n'est m me pas compr ss !

Nous cherchons au moyen de l' quation diff rentielle, $rt - s^2 = 0$ (notations de Monge $r = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $s = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $t = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, avec $z = f(x, y)$ au besoin solution implicite de l' quation de la surface $F(x, y, z) = 0$), toutes les surfaces cubiques d veloppables. On peut proc der pour cela, une recherche des surfaces cubiques d veloppables, par les coefficients ind termin s, au moyen de Maple. Mais le calcul effectif donne un polyn me d velopp de 30 pages, dont il faut annuler les coefficients. En fait il est inutile, si on se souvient qu'une transformation homographique, laisse invariante la notion de plan, d'intersection, et de droite, de contact, de bi-rapport, de distinction (un plan est transform en plan, une droite intersection de deux plans distincts, en une droite, un plan tangent une surface devient plan tangent la surface transform e,....). En effet la r duction d'Abhyankar, ne fait appel qu' des transformations homographiques : Si une surface est d veloppable, cela signifie que le plan tangent une surface r gl e est invariant tout le long d'une g n ratrice, il en sera de m me pour la famille transform e. (En d'autres termes, la nullit , la non nullit de $rt - s^2$, sont des invariants par transformation homographique !) Or pour F_3 et F_4, le calcul de $rt - s^2$ (puisque leurs quations respectives sont r solubles en $z = f(x, y)$) donne rapidement, et au besoin avec Maple respectivement les deux valeurs non nulles $-\frac{1}{x^4}$ et $-\frac{4xy + 4y^2 + x^2}{x^6}$. **Nous constatons donc qu'on ne trouve que les c nes cubiques (cat gories F_1 et F_2 dans la classification du savant indien) comme surfaces cubiques g n rales, d veloppables.**

Examinons, maintenant quelques cas particuliers de surfaces r gl es classiques, pour les int grer dans la classificiation g n rale d'Abhyankar.

Il y a d'abord le cas des cono des, de Pl cker $z(x^2 + y^2) = 2xy$, de Zindler (Konrad, 1866-1934) $z(x^2 - y^2) = 2xy$, de Whitney $zx^2 = y^2$ (ce sont bien des cono des, car leur quation pour se mettre sous la forme $\Phi(z, \frac{y}{x}) = 0$, l' quation g n rale d'une telle surface de plan directeur R, d'axe, l'intersection des plans $P = 0, Q = 0$, tant de la forme $\Phi(R, \frac{P}{Q}) = 0$.

La droite double est l'axe Oz car lorsqu'on coupe la surface par des plans le contenant, d' quation $y = \lambda x$, il y a alors x^2 en facteur et donc la solution $x = 0 \Longrightarrow y = 0$, est double. D'ailleurs si on coupe la surface par le plan $z = h$, on trouve une quation globale de deux droites qui se coupent en $(0, 0, h)$.

Nous utilisons cette m thode de v rification de droite double, lorsque celle ci est connue ou vidente. Pour trouver, en g n ral, les points singuliers de la surface, on recherche les points critiques du premier membre, et on v rifie qu'ils sont sur la surface.

Comme les g n ratrices sont des droites $y = \lambda x, z = h$, elles rencontrent toutes la droite l'infini du plan xOy, toutes ces surfaces appartiennent donc la cat gorie non sp ciale F_4 d'Abhyankar.

Le probl me de Polytechnique 1977 tudiait le Ruban de M bius $\begin{cases} x = (a + \rho\cos\frac{\theta}{2})\cos\theta \\ y = (a + \rho\cos\frac{\theta}{2})\sin\theta \\ z = \rho\sin\frac{\theta}{2} \end{cases}$ qui est une surface r gl e, puisque les courbes $\theta = Cte$ sont des droites, et, une limination rapide des param tres ρ et θ, donne, apr s avoir pos , $r = a + \rho\cos\frac{\theta}{2}$, $cotan\frac{\theta}{2} = \frac{r-a}{z} = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\frac{s}{r}+1}{\frac{y}{r}} = \frac{x+r}{y}$ soit $(r-a)y = (x+r)z$; Ce qui implique $r^2(y-z)^2 = (ay + zx)^2 \Longleftrightarrow (x^2 + y^2)(y^2 - 2yz + z^2) = a^2y^2 + z^2x^2 + 2axyz \Longleftrightarrow y\big(-y^3 + 2y^2z - y(z^2 + x^2 - a^2) + 2xz(a + x)\big) = 0$

On pose $\boxed{\mathbf{M(x, y, z) = -y^3 + 2y^2z - y(z^2 + x^2 - a^2) + 2xz(a + x)}}$

Une v rification rapide, permet de s'assurer que les points particuliers, rendant les d nominateurs rencontr s nuls, satisfont bien cette quation.

Cerise sur le gateau : **le ruban de M bius est une surface cubique, r gl e !**

Analysons, dans quel type d'Abhyankar elle se classe ?

Le probl me est de savoir si elle est rencontre une droite double et une droite simple pour la situer dans le cas non sp cial d'Abhyakar.

Rappelons (programme de math matiques sp ciales) que pour d montrer que deux droites (A, s) et (B, t) (d finies par un point et un vecteur directeur non nul), soient coplanaires est que $det(AB, s, t) = 0$, et appliquons ce crit re, une droite (A, s) inconnue avec $A = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ et $s = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, et toutes les g n ratrices (B, t) avec $B = \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ a\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$ et $t = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\cos\theta \\ \cos\frac{\theta}{2}\sin\theta \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$.

On obtient la condition $D(\theta) = \begin{vmatrix} p - a\cos\theta & u & \cos\frac{\theta}{2}\cos\theta \\ q - a\sin\theta & v & \cos\frac{\theta}{2}\sin\theta \\ r & w & \sin\frac{\theta}{2} \end{vmatrix} = 0.$

Un d veloppement la main suivi d'une lin arisation des fonctions trigonom triques, ou plus rapidement un calcul Maple avec les proc dures T:=combine(D(t),trig) puis TT:=collect(2*T,[cos(t/2), sin(t/2), cos(3*t/2), sin (3t/2)]) nous donne : $TT = (qw + ua - rv)\cos\frac{t}{2} + (2vp - pw + va - 2qu + ru)\sin\frac{t}{2} + (-ua + qw - rv)\cos(3\frac{t}{2}) + (-wp + ru - av)\sin(3\frac{t}{2})$.

L'ind pendance des fonctions 4 fonctions trigonom triques intervenant ci-dessus, donne le syst me : $\begin{cases} qw + au - rv = 0 \\ 2vp - pw + va - 2qu + ru = 0 \\ -ua + qw - rv \\ -wp + ru - av = 0 \end{cases}$ et une r solution de ce syst me en (p, q, r, u, v, w) la main ou plus rapidement avec Maple par solve, donne deux solutions distinctes, apr s avoir cart la solution qui ne peut convenir avec le vecteur (u, v, w) nul : (1) $(p = 0, q = 0, r = r, u = 0, v = 0, w = w)$, qui est l'axe Oz et (2) $(p = -a, q = q, r = q, u = 0, v = v, w = v)$.

Pour rechercher laquelle des deux correspond une droite double, cherchons les points critiques de la fonction M, en r solvant le syst me : $M'_x = M'_y = M'z = 0$ soit $yx - z(x+a) - xz = 3y^2 - 4yz + z^2 + x^2 - a^2 = -y^2 + yz - x(x+a) = 0$.

Un calcul la main ou plus rapide avec Maple donne $x = -a, y = z$ qui donne tous les points de la seconde droite, et les deux points $(-\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, -\frac{a}{3})$ et $(-\frac{a}{3}, -\frac{a}{3}, \frac{a}{3})$, qui ne sont pas sur le ruban puisque $M(-\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, -\frac{a}{3}) = -\frac{8}{27}a^3 \neq 0$ et $M(-\frac{a}{3}, -\frac{a}{3}, \frac{a}{3}) = +\frac{8}{27}a^3 \neq 0$.

Le ruban de M bius est donc une surface cubique, r gl e, $\mathbf{F_4}$ non sp ciale d'Abhyankar, la droite simple d'appui tant dans ce cas l'axe Oz.

Remarquons, qu'une condition n c ssaire et suffisante (par raison de degr de la section) pour qu'un plan coupe le ruban suivant une conique, est qu'il passe par la droite simple (ici l'axe Oz). Un calcul rapide d'intersection de la surface de M bius par le plan $y = kx$, donne l'axe Oz et la conique, dont l' quation est apr s utilisation de la m thode de Gauss, pour le cas $k \neq 0$: $(x - \frac{z}{k})^2 - \frac{1}{1+k^2}(z + \frac{a}{k})^2 - \frac{a^2(k^2-1)}{k^2+1} = 0$. Les sections par des plans contenant l'axe Oz sont toujours des hyperboles ventuellement d compos es pour $k = 0, -1, 1$. Ceci semble utilis en R.P.T. (Rapid Prototyping Techniques) Technique de sculpture utilisant l'infographie.

Le lecteur pourra s'exercer classer les surfaces cubiques qu'il rencontrera, en v rifiant, avec la m me technique, les r sultats donn s pour F_3 et F_4, de non existence dans le premier cas d'existence dans le second (et alors la pr ciser) d'une droite simple d'appui commune toutes les g n ratrices.

(Le lecteur curieux, voulant en savoir plus sur les surfaces r gl es pourra entrevoir la richesse et la modernit , de cette notion dans les travaux de Klein et Grassmann pr sent s dans les livres de Munford, Pottmann et Waerden, utilisant les coordonn es pl ck riennes (voir ce mot dans le glossaire), pour montrer en particulier que les droites d'une telle surface sont des points de la quadrique de Klein dans l'espace 5 dimensions)

---

(3) La surface de CLEBSCH est non r gl e :

(Attention ne pas faire l'erreur de d butant, de croire que toutes les surfaces r gl es sont d veloppables : les familles de droites un param tre n'ont pas n c ssairement une enveloppe !)

En effet si elle l' tait, elle aurait une droite double (voir la d monstration pr c dente) dont les points sont singuliers sur la surface,

Or soit directement sous la forme de son quation en composantes projectives, soit en coordonn es ordinaires (La coh rence se faisant en remarquant qu'en coordonn es homog nes $f(x = \frac{X}{T}, y = \frac{Y}{T}, z = \frac{Z}{T}) = G(X, Y, Z, T)$ est 0-homog ne et que $G'_X(X, Y, Z, T) = \frac{1}{T}f'_x(\frac{X}{T}, \frac{Y}{T}, \frac{Z}{T})$, $G'_Y(X, Y, Z, T) = \frac{1}{T}f'_y(\frac{X}{T}, \frac{Y}{T}, \frac{Z}{T})$, $G'_Z(X, Y, Z, T) = \frac{1}{T}f'_z(\frac{X}{T}, \frac{Y}{T}, \frac{Z}{T})$, et que $G'_T(X, Y, Z, T) = -\frac{1}{T^2}(Xf'_x(\frac{X}{T}, \frac{Y}{T}, \frac{Z}{T}) + Yf'_y(\frac{X}{T}, \frac{Y}{T}, \frac{Z}{T}) + Zf'_z(\frac{X}{T}, \frac{Y}{T}, \frac{Z}{T})$ est coh rent avec l'identit d'Euler des fonctions 0-homog nes) ; le passage des composantes homog nes aux composantes projectives g n rales, se faisant par le th or me de composition des d rivations et la multiplication par le jacobien gal au d terminant de la transformation projective associ e, comme le v rifieront rapidement nos lecteurs)

La surface de Clebsch ayant son quation en coordonn es homog nes sous la forme $F(X, Y, Z, T) = X^3 + Y^3 + Z^3 + T^3 - (X + Y + Z + T)^3 = 0$, les points singuliers ventuels v rifieraient $X^2 = (X + Y + Z + T)^2$, $Y^2 = (X + Y + Z + T)^2$, $Z^2 = (X + Y + Z + T)^2$, $T^2 = (X + Y + Z + T)^2$, ce qui donnerait avec des notations classiques videntes et posant $D = (X + Y + Z + T)$: $X = \varepsilon D$, $Y = \varepsilon' D$, $Z = \varepsilon" D$, $T = \varepsilon"' D$; or un tel point singulier doit tre sur la surface, par cons quent (puisque $\varepsilon^3 = \varepsilon$) $D^3(\varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon" + \varepsilon"' - 1) = 0$; mais le coefficient de D est impair donc jamais nul. Donc $D = 0$ ce qui est cart puisque les composantes homog nes ne doivent pas tre toutes nulles.

On aurait un syst me beaucoup moins simple, si on prenait les quations en coordonn es ordinaires. Mais on peut le faire quand m me en s'aidant de Maple par solve(diff(H,x)=0,diff(H,y)=0,diff(H,z)=0,x,y,z); et en montrant que les points de gradient nul, ne sont pas sur la surface. Cela se fait avec Maple en quelques lignes aussi bien avec la forme H de Hunt que la forme de Todesco.

En prime nous avons d montr que la surface de CLEBSCH est lisse, sans point singulier : en anglais on dit "smooth".

---

(4) Recherche de toutes les droites de la surface de Clebsch :

Consid rons une surface cubique non r gl e S ; Supposons (ce qui sera prouv par le calcul (*)) qu'elle contienne un nombre non nul, fini de droites. Consid rons une droite particuli re L. Tout plan H coupe S suivant une courbe du troisi me degr ; en particulier tout plan contenant L. Comme L est du premier degr , le reste de la section est une conique, qui elle m me, moyennant un choix convenable de H, peut tre d compos e en deux droites.

*(En fait, je n'ai trouv de d monstration rigoureuse, de l'existence de droites dans le cas g n ral, sur une surface cubique, non r gl e que dans les livres de Reid et Shafarevich, Munford et l'article de Sedeberg, r pertori s dans la bibliographie avec les pages indiqu es, le premier montrant que le r sultant des quations trouv es est du vingt septi me degr , le deuxi me pour d montrer qu'il y a au moins une droite, en utilisant les coordon es pl ck riennes, prouvant que la dimension de la fibre associ e est geq1, le trois me lui montre que toutes les cubiques lisses, ont le m me nombre de droites et en calcule le nombre pour celle qui est la plus simple $x^3+y^3+z^3+t^3=0$, le quatri me par un calcul alg brique men par un logiciel informatique ; Char et Al ont en 1990, (voir Bajaj p 9******) fait un calcul avec Maple, du r sultant des quations, associ es la recherche des droites sur une cubique : le r sultat comprend plusieurs centaines de millier de termes...., comme quoi l'intelligence, le suivi de l'interpr tation est primordial pour la compr hension et la signification des r sultats !)*

Comme une droite est sa propre tangente, un tel plan, sera appel "tritangent", car tangent S aux trois sommets du triangle en lequel se d compose alors la section de S par H.

Choisissons une droite L quelconque de S. Moyennant un choix convenable du t tra dre de r f rence, elle a pour quations $x_3 = x_4 = 0$ (une droite tant d finie comme intersection de deux plans).

Comme S la contient, son quation $f = 0$, o f est une forme cubique en $x_1, ..., x_4$, prend la forme $x_3U + x_4V = 0$, o U, V sont, par raison de degr , des formes quadratiques en $x_1, ..., x_4$.

Un plan H_μ du faisceau de L a pour quation, $x_3 = \mu x_4$. (on permet $\mu = \infty$) ; L' quation de la cubique de section de ce plan et de S est : $x4\big(\mu U(x_1, x_2, \mu x_4, x_4) + V(x_1, x_2, \mu x_4, x_4)\big) = 0$.

$x_4 = 0$ correspond la ligne L. Le reste de la section est la conique : d' quation : $\mu U(x_1, x_2, \mu x_4, x_4) + V(x_1, x_2, \mu x_4, x_4) = 0$.

Comme il a t dit plus haut, pour que H_μ soit tri-tangent, il faut et il suffit que cette conique soit d compos e en deux droites, donc que le discrimiminant de la forme quadratique du premier membre soit nul.

On trouve une quation du cinqui me degr en μ. Il y a donc cinq plans tritangents S, contenant une droite donn e L quelconque de S.

Pour les petits curieux, voici le premier membre de cette quation, donn par Maple en quatre centi mes de seconde :

restart: $U := (x1, x2, x3, x4)->a11*x1^2 + a22*x2^2 + a33*x3^2 + a44*x4^2 + 2*a12*x1*x2 + 2*a13*x1*x3 + 2*a14*x1*x4 + 2*a23*x2*x3 + 2*a24*x2*x4 + 2*a34*x3*x4;$

$V := (x1, x2, x3, x4)->b11*x1^2 + b22*x2^2 + b33*x3^2 + b44*x4^2 + 2*b12*x1*x2 + 2*b13*x1*x3 + 2*b14*x1*x4 + 2*b23*x2*x3 + 2*b24*x2*x4 + 2*b34*x3*x4;$

$Q := (x1, x2, x4)->(mu*U(x1, x2, mu*x4, x4) + V(x1, x2, mu*x4, x4));$

with(linalg):

$st := time() : H := hessian(Q(x1, x2, x4), [x1, x2, x4]); DD := det(H); collect(\%, mu);$

chrono:=(time()-st)*seconde(s);

$$H = \begin{bmatrix} 2*\mu a_{11} + 2b_{11} & 2\mu a_{12} + 2b_{12} & \mu(2a_{13}\mu + 2a_{14}) + 2b_{13}\mu + 2b_{14} \\ 2\mu a_{12} + 2b_{12} & 2\mu a_{22} + 2b_{22} & \mu(2a_{23}\mu + 2a_{24}) + 2b_{23}\mu + 2b_{24} \\ \mu(2a_{13}\mu + 2a_{14}) + 2b_{13}\mu + 2b_{14} & \mu(2a_{23}\mu + 2a_{24}) + 2b_{23}\mu + 2b_{24} & \mu(2a_{33}\mu^2 + 2a_{44} + 4a_{34}\mu) + 2b_{33}\mu^2 + 2b_{44} + 4b_{34}\mu \end{bmatrix}$$

Le d terminant de H occupe 19 lignes en Maple.

$D1 := (8*a11*a22*a33 - 8*a12^2*a33 - 8*a13^2*a22 - 8*a11*a23^2 + 16*a12*a13*a23)\mu^5$

$+(-8*a13^2*b22 - 16*a13*a14*a22 - 16*a12*b12*a33 - 8*b11*a23^2 + 16*b12*a13*a23 - 16*a12^2*a34 + 8*b11*a22*a33 + 8*a11*a22*b33 + 16*a12*a14*a23 + 8*a11*b22*a33 + 16*a11*a22*a34 + 16*a12*a13*b23 - 16*a11*a23*b23 + 16*a12*a13*a24 - 16*a13*b13*a22 + 16*a12*b13*a23 - 8*a12^2*b33 - 16*a11*a23*a24)\mu^4$

$+(8*a11*a22*a44 - 8*a11*a24^2 - 8*a11*b23^2 - 8*a12^2*a44 - 16*a12^2*b34 - 8*a14^2*a22 - 8*b13^2*a22 + 8*b11*b22*a33 - 16*b11*a23*a24 - 16*b11*a23*b23 - 32*a12*b12*a34 - 16*a12*b12*b33 + 16*a12*a14*a24 + 16*a12*a14*b23 + 16*a12*b13*a24 + 16*a12*b13*b23 + 16*a12*a13*b24 + 16*a12*b14*a23 + 16*b12*a13*a24 + 16*b12*a13*b23 + 16*b12*a14*a23 + 16*b12*b13*a23 - 16*a13*a14*b22 - 16*a13*b13*b22 - 16*a13*b14*a22 - 16*a14*b13*a22 - 8*b12^2*a33 + 16*a11*a22*b34 + 16*a11*b22*a34 + 8*a11*b22*b33 - 16*a11*a23*b24 - 16*a11*a24*b23 + 16*b11*a22*a34 + 8*b11*a22*b33)\mu^3$

$+(8*a11*a22*b44 - 8*b11*b23^2 - 16*b12^2*a34 - 8*b12^2*b33 - 8*a14^2*b22 - 8*b13^2*b22 - 8*b11*a24^2 - 8*a12^2*b44 + 16*b11*a22*b34 + 16*b11*b22*a34 + 8*b11*b22*b33 - 16*b11*a23*b24 - 16*b11*a24*b23 - 16*a12*b12*a44 - 32*a12*$

(*) *Je n'ai pas trouv d'autre m thode, car l'argumentation imprim e des auteurs des ann es 1860, me laisse perplexe, pour question de compatibilit : Une droite d pend de 4 param tres, or le report dans une quation du troisi me degr donne 4 conditions : il y a autant d'inconnues que d' quations, donc le probl me est possible.... : en fait ils utilisaient sans le clamer, la th orie de "l'apolarit " (voir quelques d tails sur ce mot au moment de l' vocation de l' quation pentah drale au d but du th me des double-sixains.*

$b12*b34+16*a12*a14*b24+16*a12*b13*b24+16*a12*b14*a24+16*a12*b14*b23+16*b12*a14*a24+16*b12*a14*b23+16*b12*b13*a24+16*b12*b13*b23+16*b12*a13*b24+16*b12*b14*a23-16*a13*b14*b22-16*a14*b13*b22-16*a14*b14*a22-16*b13*b14*a22+8*a11*b22*a44+16*a11*b22*b34-16*a11*a24*b24-16*a11*b23*b24+8*b11*a22*a44)\mu^2$

$+(16*a12*b14*b24+8*a11*b22*b44+8*b11*b22*a44+16*b12*b14*a24+16*b12*a14*b24+16*b11*b22*b34-8*b14^2*a22+16*b12*b13*b24+16*b12*b14*b23+8*b11*a22*b44-16*a14*b14*b22-16*b13*b14*b22-8*a11*b24^2-8*b12^2*a44-16*b11*a24*b24-16*b12^2*b34-16*a12*b12*b44-16*b11*b23*b24)\mu$

$+8*b11*b22*b44-8*b14^2*b22+16*b12*b14*b24-8*b11*b24^2-8*b12^2*b44$

On peut donc compter le nombre de droites port es par S.

Un plan tritangent tant donn (Si L existe, ce qui sera assur par le calcul ci dessous, il en existe au moins un), il est le cinqui me plan tritangent associ   chacune des trois droites de S qu'il contient : Il rencontre donc $4.3=12$ autres plans tritangents, dans chacun desquels il y a deux autres droites de S : au total il y a donc $\boxed{\mathbf{12*2+3=27}}$ droites sur S. (le 3 ajout , comptant les trois droites du plan tritangent donn).

Bien que cela ne concerne pas directement notre propos, on peut remarquer que comme chaque droite est contenue dans cinq plans tritangents, et que chaque plan tritangent, contient trois droites, le principe des bergers (*) (on compte le nombre de pattes et on divise par quatre pour avoir le nombre de moutons) nous dit qu'il y a $\frac{27*5}{3}=45$ plans tritangents S.

Dans son monumental [L2] Schl fli, (**) utilisant un proc d d Steiner (en d terminant la classe t de l'enveloppe des plans bitangents) et remarquant que le nombre de droites d'une surface alg brique de degr $n=3$ est gal celui des plans bitangents passant par un point quelconque, a m me d montr que le nombre de plans bi-tangents   une telle surface, passant par un point donn , tait $\boxed{\mathbf{t(n)=\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n^3-n^2+n-12)}}$; Le lecteur v rifiera que $t(3)=27$.

Une premi re m thode consiste   utiliser l' quation de la surface de Clebsch sous la forme $X^3+Y^3+Z^3+T^3=D^3$ avec $D=X+Y+Z+T$, mais les factorisations sont d licates avec le risque d' quations complexes, qui masqueraient la r alit des droites ; aussi nous pr f rons utiliser la surface sous la forme de Hunt ; Le calcul est aussi possible sous la forme de Todesco mais la pr sence du $\sqrt{3}$ et la moindre sym trie rendent le calcul plus lent et il y a seulement 18 droites non horizontales au lieu de 22.

Nous nous aidons de Maple, mais le calcul peut tre men   la main.

- Recherche des droites non horizontales : On pose $H:=(x,y,z)->81(x^3+y^3+z^3)-189(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y)+54xyz+126(xy+yz+zx)-9(x^2+y^2+z^2)-9(x+y+z)+1=0$;

Puis les commandes maple res:=H(a*z+p,b*z+q,z); H1:=expand(res); H2:=collect(H1,z): permettent d'obtenir les quations en (a,b,p,q)

$$\begin{cases} 1+81*p^3+81*q^3-189*q^2*p-9*q^2+126*q*p-9*p^2-9*p-189*q*p^2-9*q=0 \\ -9+126*q*a+126*p-189*p^2+243*b*q^2-9*a-18*b*q-378*q*a*p-378*b*q*p \\ +126*b*p-9*b-18*a*p-189*q^2*a-189*q^2-189*b*p^2+126*q+54*q*p+243*a*p^2=0 \\ -378*b*q+243*a^2*p-189*b^2*p-9+126*b-378*a*p-378*b*q*a-189*q+126*b*a \\ +54*b*p-189*p+54*q*a-378*b*a*p-9*b^2-9*a^2+126*a-189*q*a^2+243*b^2*q=0 \\ -189*b^2+81-189*b^2*a-189*b+81*b^3-189*a-189*a^2-189*b*a^2+54*b*a+81*a^3=0 \end{cases}$$

Alors les commandes :

C:=[seq(coeff(H2,z,i),i=0..3)]; solutions :=map(allvalues,[solve(seq(C[i]=0,i=1..4),a,b,p,q)]); permettent d'obtenir 22 solutions (que l'on compte   la main ou par nops) en cinq secondes ! et solutions qui sont

---

(*) *("La culture c'est comme la confiture, moins on en a plus on l' tale" seule, "conqu te", avanc e, r duite   un simple aphorisme, de "mai 1968"")*

(**) *(En lisant les travaux de Schl fli, Salmon,....au 19 me si cle on est surpris d'une part par leur hauteur de vue, leur modernit (on rencontre des d terminants, des fractions continues, des jacobiens, des op rateurs de d rivation, th or me des fonctions implicites, parall lisme de Clifford, syzygie.... et ceci sans pudibonderie ni hypocrisie Tartufienne "Cachez ce jacobien que je ne saurais voir" : puisque ces outils sont connus et rod s utilisons les !) et on ne peut que regr tter que des programmes ou d biles ou volontairement tronqu s, cachent tout ce qui est int r ssant aux l ves, r servant les bonnes informations   une caste doctrinaire, dogmatique donc sectaire et primaire qui auto-prot ge ainsi ses privil ges (en particulier en rigeant en pseudo science (sinistre car bas e sur un formatage artificiel des individus) la p dagogie : la vraie, la seule est d' tre de niveau suffisant pour expliquer bien aux autres, il faut d'abord bien comprendre pour soi !) : tout ceci nuit d'une part aux individus d motiv s par des sujets ternes, d'autre part au pays, en r duisant l'effectif d'une v ritable lite intellectuelle. Comme disait un coll gue "les l ves votent avec leurs pieds en se d tournant des vraies math matiques qu'ils ne peuvent conna tre, en ayant marre qu'on les prenne pour des Kh..s avec de tels programmes")*

$$\begin{cases}
(1)\ a=-1, b=0, p=\frac{1}{3}, q=0\\
(2)\ a=0, b=-1, p=0, q=\frac{1}{3}\\
(3)\ a=-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{5}, b=-\frac{3}{4}\sqrt{5}-\frac{5}{4}, p=-\frac{1}{12}\sqrt{5}+\frac{1}{4}, q=\frac{1}{12}\sqrt{5}+\frac{1}{12}\\
(4)\ a=-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{5}, b=-\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\sqrt{5}, p=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\sqrt{5}, q=\frac{1}{12}-\frac{1}{12}\sqrt{5},\\
(5)\ a=-\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\sqrt{5}, b=-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{5}, p=\frac{1}{12}-\frac{1}{12}\sqrt{5}, q=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\sqrt{5},\\
(6)\ a=-\frac{3}{4}\sqrt{5}-\frac{5}{4}, b=-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{5}, p=\frac{1}{12}\sqrt{5}+\frac{1}{12}, q=-\frac{1}{12}\sqrt{5}+\frac{1}{4}\\
(7)\ a=3, b=0, p=-\frac{1}{3}, q=0\\
(8)\ a=0, b=-1, p=-\frac{1}{3}, q=0\\
(9)\ a=-1, b=0, p=\frac{2}{3}, q=\frac{1}{3}\\
(10)\ a=0, b=\frac{1}{3}, p=0, q=\frac{1}{9}\\
(11)\ a=-3-\sqrt{5}, b=-\sqrt{5}, p=\frac{7}{6}+\frac{1}{2}\sqrt{5}, q=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{5}\\
(12)\ a=-3+\sqrt{5}, b=\sqrt{5}, p=\frac{7}{6}-\frac{1}{2}\sqrt{5}, q=\frac{1}{2}-\frac{1}{7}6\sqrt{5}\\
(13)\ a=-\frac{1}{5}\sqrt{5}, b=1+\frac{3}{5}\sqrt{5}, p=\frac{1}{6}+\frac{1}{10}\sqrt{5}, q=\frac{1}{6}+\frac{1}{30}\sqrt{5}\\
(14)\ a=\frac{1}{5}\sqrt{5}, b=1-\frac{3}{5}\sqrt{5}, p=\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\sqrt{5}, q=\frac{1}{6}-\frac{1}{30}\sqrt{5}\\
(15)\ a=0, b=3, p=0, q=-\frac{1}{3}\\
(16)\ a=-1, b=0, p=0, q=-\frac{1}{3}\\
(17)\ a=\frac{1}{3}, b=0, p=\frac{1}{9}, q=0\\
(18)\ a=0, b=-1, p=\frac{1}{3}, q=\frac{2}{3}\\
(19)\ a=-\sqrt{5}, b=-3-\sqrt{5}, p=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{5}, q=\frac{7}{6}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\\
(20)\ a=\sqrt{5}, b=-3+\sqrt{5}, p=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{5}, q=\frac{7}{6}-\frac{1}{2}\sqrt{5},\\
(21)\ a=1+\frac{3}{5}\sqrt{5}, b=-\frac{1}{5}\sqrt{5}, p=\frac{1}{6}+\frac{1}{30}\sqrt{5}, q=\frac{1}{6}+\frac{1}{10}\sqrt{5}\\
(22)\ a=1-\frac{3}{5}\sqrt{5}, b=\frac{1}{5}\sqrt{5}, p=\frac{1}{6}-\frac{1}{30}\sqrt{5}, q=\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\sqrt{5}
\end{cases}$$

Il suffit d' crire $x=az+p, y=bz+q$ pour obtenir 22 droites port es par la surface ; ces 22 droites sont toutes r elles.

On recherche maintenant les droites horizontales sous la forme $z=h, x=at+p, y=bt+q$, avec les commandes Maple HH:=H(a*t+p,b*t+q,h); puis HH2:=collect(HH,t); qui donnent les quations

$$\begin{cases}
126*h*p-189*h^2*q+1-189*h*q^2+54*h*q*p-189*q^2*p-189*h*p^2-189*h^2*p-9*q\\
+126*h*q-9*h^2+81*p^3-9*q^2-9*p+126*q*p-9*p^2-189*q*p^2-9*h+81*q^3+81*h^3=0\\
126*h*b-189*h^2*b+126*h*a+54*h*q*a+54*h*b*p-189*q^2*a-378*b*q*p-378*h*b*q\\
-18*b*q-9*b+126*q*a+126*b*p-189*h^2*a-378*q*a*p-189*b*p^2+243*a*p^2\\
+243*b*q^2-9*a-18*a*p-378*h*a*p=0\\
-9*b^2-378*b*q*a-189*b^2*p-189*h*b^2+54*h*b*a+243*b^2*q-189*q*a^2\\
-378*b*a*p+126*b*a+243*a^2*p-189*h*a^2-9*a^2=0\\
-189*b*a^2-189*b^2*a+81*a^3+81*b^3=0
\end{cases}$$

Puis les commandes CC:=[seq(coeff(HH2,t,i),i=0..3)];

solhorizont :=map(allvalues,[solve(seq(CC[i]=0,i=1..4),a,b,p,q,h)]);

donnent 8 solutions dont les trois premi res sont parasites, ne repr sentant pas des droites car (avec $a=b=0$) mais des points, et la rigueur, qu'on peut utiliser pour former une repr sentation param trique de la nappe avec (mais les formules sont tr s lourdes, avec des giga-radicaux) les param tres (p,q). Chacune de ces solutions parasites fournit une repr sentation param trique de chacune des branches de la nappe.

Les cinq nouvelles droites que nous obtenons sont donn es par $z=h, x=at+p, y=bt+q$,

soit $\boxed{\mathbf{ay-bx=aq-bp}\text{ ou }\mathbf{y=\frac{b}{a}x+q-\frac{b}{a}p}}$ avec :

$$\begin{cases}
(1h)\ h=0, a=\frac{1}{3}b, b=b, p=\frac{1}{3}q+\frac{1}{9}, q=q \quad \boxed{\mathbf{y=3x-\frac{1}{3},\ \ z=0}}\\
(2h)\ h=-\frac{1}{3}, a=-b, b=b, p=-q, q=q \quad \boxed{\mathbf{y=-x,\ \ z=-\frac{1}{3}}}\\
(3h)\ h=\frac{1}{3}, a=-b, b=b, p=-q+\frac{2}{3}, q=q \quad \boxed{\mathbf{y=-x+\frac{2}{3},\ \ z=\frac{1}{3}}}\\
(4h)\ h=0, a=-b, b=b, p=\frac{1}{3}-q, q=q \quad \boxed{\mathbf{y=-x+\frac{1}{3},\ \ z=0}}\\
(5h)\ h=0, a=3b, b=b, p=-\frac{1}{3}+3q, q=q \quad \boxed{\mathbf{y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{9},\ \ z=0}}
\end{cases}$$

Le fait qu'il y ait des param tres libres, tient au choix du param tre : par exemple la premi re droite est $z=0, x=\frac{1}{3}bt+\frac{1}{3}q+\frac{1}{9}, y=bt+q$, donc $x=\frac{1}{3}y+\frac{1}{9}$.

La surface de Clebsch (nous avons illustr le cas sous la forme de Hunt) contient donc **22+5=27** droites toutes r elles et seulement **27**. Ce qui prouve aussi, d'une autre mani re que plus haut, qu'elle est donc non r gl e (sinon elle aurait une infinit de droites).

---

(5) Repr sentation param trique de la surface de Clebsch :

Premi re repr sentation

(Ce n'est pas la plus belle, mais elle a l'avantage d' tre la premi re tablie, de montrer la voie !)

Apr s une id e sugg r e par Ferrarese, math maticien de Turin qui a fait les calculs des programmes permettant le site Todesco, voici la m thode suivie.

Je prend, par exemple, comme droites D_1 $x+y=\frac{2}{3}$, $z=\frac{1}{3}$ (la troisi me droite horizontale) et D_2 $x=-\frac{1}{3}$, $y=-z$ (la huiti me droite non horizontale) ; simples ne se rencontrant pas et non contenues dans le plan $z=0$; je prend un point $P(u,v,0)$ dans ce plan ; je d termine les plans (par faisceaux) PD_1 et PD_2, ils d terminent une droite que je param tre (par z) ; elle rencontre la surface cubique en deux points d ja connus (ceux sur D_1 et D_2) : il reste un troisi me point, ce qui fournit le param trage de la surface de Clebsch sous la forme de Hunt, en prem re mondiale (mais Esculier m'a signal   qu'au trac , il y avait des plans parasites, donc le p tard est actuellement mouill).

L' quation du faisceau des plans qui contiennentt D_1 est $x+y-\frac{2}{3}+\lambda(z-\frac{1}{3})=0$; la condition de contenir P donne $u+v-\frac{2}{3}-\frac{\lambda}{3}=0$ et donc $\lambda=3-u+v)-2$ et l' quation du plan D_1P est $\boxed{\mathbf{x+y-\frac{2}{3}+(3u+3v-2)(z-\frac{1}{3})=0}}$

De m me l' quation du faisceau des plans qui contiennent D_2 est $x+\frac{1}{3}+\mu(y+z)=0$; la condition de contenir P donne $u+\frac{1}{3}+\mu(v)=0$ soit ${}_m u=-\frac{U+1/3}{v}$ et l' quation du plan D_2P est $\boxed{\mathbf{v(x+\frac{1}{3})-(u+\frac{1}{3})(y+z)=0}}$.

Ces plans ne sont jamais parall les ni confondus, et ils ont en commun le point $P(u,v,0)$.

Ils se coupent suivant une droite Δ_P, qui contient P.

solve(x+y-2/3+(3*(u+v)-2)*(z-1/3)=0,v*(x+1/3)-(u+1/3)*(y+z),x,y);

donne $x=-\frac{(3u+1)(u+v-1)}{u+v+1/3}z+u$ et $y=-\frac{3uv+3v^2-2v+u+1/3)}{u+v+1/3}z+v$. ($z=0$ donne bien le point P)

Comme pr vu on v rifie (la main ou par solve de Maple) qu'elle rencontre D_1 avec $z=\frac{1}{3}$ et D_2 avec $z=\frac{1}{9}\frac{3v+3u+1}{u+v-1}$.

Pour cherche le troisi me point de rencontre de Δ_P avec la surface H, on reporte cette repr sentation param trique en fonction de z dans l' quation de H.

$H := (x,y,z)->126*z*x+1-189*z*y^2-189*z*x^2-189*y^2*x+126*z*y-9*x^2-189*z^2*y-189*z^2*x+126*y*x-9*y^2+81*z^3-189*y*x^2+81*y^3+81*x^3-9*x+54*z*y*x-9*z-9*y-9*z^2;$

$F := H(-(9*v*u*z-3*v*u+3*v*z-6*u*z-3*z+9*u^2*z-3*u^2-u)/(3*v+3*u+1),-(9*v*u*z-3*v*u+9*v^2*z-3*v^2-6*v*z-v+3*u*z+z)/(3*v+3*u+1),z):$

solve(F=0,z); donne, comme attendu les deux points pr c dents, et le troisi me point sur la surface cubique (une droite la rencontre en trois points et trois points seulement) donn   par :

$zc=\frac{1}{3}\cdot\frac{243u^4+54u^3-324vu^3-36u^2-1134v^2u^2+162vu^2+162v^2u-6u+72vu-324v^3u-6v-36v^2+54v^3+243v^4+1}{243u^4-324vu^3-324u^3-198u^2-1134v^2u^2+756vu^2-324v^3u-252vu+12u+756v^2u+243v^4+11-180v-324v^3+378v^2}$

Le report (avec l'utilisation de simplify de Maple) dans x et y donne aussi

$xc=-\frac{135u^4+108u^3+54u^3v+18u^2-216u^2v^2+126u^2v-4u+66uv-72uv^2-54uv^3-1-90v^3+81v^4+10v}{243u^4-324vu^3-324u^3-198u^2-1134v^2u^2+756vu^2-324v^3u-252vu+12u+756v^2u+243v^4+11-180v-324v^3+378v^2}$

$yc=-\frac{1}{3}\cdot\frac{243u^4+54u^3-162u^3v-36u^2-648u^2v^2+756u^2v-6u+126uv-378uv^2+162uv^3+1-1080v^3+405v^4-48v+594v^2}{243u^4-324vu^3-324u^3-198u^2-1134v^2u^2+756vu^2-324v^3u-252vu+12u+756v^2u+243v^4+11-180v-324v^3+378v^2}$

Ce qui constitue une repr sentation param trique rationnelle de la surface de Clebsch. Malheureusement le trac avec Maple montre qu'il y a des bouts de plans parasites, ce qui incite   penser qu'il doit rester des facteurs parasites. Mais cette repr sentation semble inexploitable pour un trac   Maple, pour la raison suivante : pour u fix , quand v varie, on passe d'une nappe de la surface   une autre d'o   les parties de plans parasites !

Seconde repr sentation

Voici une deuxi me m thode, sugg r e par Alain Esculier le 27 juin 03 apr s avoir re u mon essai : Il est beaucoup plus simple de prendre les points courants $M(u)$ et $N(v)$ sur les droites D_1 et D_2 (rappel : D_1 $x+y=2/3$, $z=\frac{1}{3}$ (la troisi me droite horizontale) et D_2 $x=-\frac{1}{3}$, $y=-z$, la seconde droite non horizontale) et chercher l'intersection de la droite MN avec la surface, on a imm diatement la repr sentation param trique ; avantage suppl mentaire, on peut prendre des droites horizontales ou non, la seule restriction est que D_1 et D_2 ne soient pas coplanaires (y compris parall les).

C'est plus court et on peut ainsi obtenir une repr sention plus simple qu'avec la premi re m thode.

Nous menons le calcul en nous aidant de Maple :

On rappelle l' quation de la surface, et on demande que les r sultats soient sans labels.

restart: interface(labelling=false);

$H := 81*x^3-189*x^2*y-189*x^2*z-189*x*y^2+54*x*y*z-189*x*z^2+81*y^3-189*y^2*z-189*y*z^2+81*z^3-9*x^2+126*x*y+126*x*z-9*y^2+126*y*z-9*z^2-9*x-9*y-9*z+1;$

On param tre les deux droites : $M := [u,-u,-1/3] : N := [0,-v+1/3,v]:$

On param tre la droite $M(u)N(v)$ au moyen du param tre t et on cherche son intersection avec la surface :

$duv := expand(M+t*(M-N)) : res := [solve(subs(x=duv[1],y=duv[2],z=duv[3],H),t)]:$

$para := simplify(subs(t = res[3], duv));$

On obtient alors la repr sentation param trique :

$\boxed{\mathbf{x = \frac{u(-12v+1+36v^2-36vu+108uv^2)}{(36v^2-108u^2v-36vu+108uv^2-1)}}}$ $\boxed{\mathbf{y = -\frac{1}{3}\frac{36v^2-18v+2-36vu+3u+108uv^2}{36v^2-108u^2v-36vu+108uv^2-1}}}$ $\boxed{\mathbf{y = -\frac{1}{3}\frac{324u^2v^2-6v+1-36vu+108uv^2}{36v^2-108u^2v-36vu+108uv^2-1}}}$

Ce calcul tait termin et int gr   l'article depuis plus de 5 mois, lorsqu'en fouinant sur le Web, glanant et butinant avec google et en recherchant des renseignements sur les cubiques r gl es, je tombais, le 17 novembre de l'an de gr ce 2003, sur des articles du math maticien indien Abhyankar, savant conptemporain, mondialement connu pour ses travaux de d -singularisation des vari t s (le parrall le avec la renormalisation invent e par Feynmann en 1948 pour liminer les infinis en lectrodynamique quantique, serait int r ssant). Apr s plusieurs tirs crois s sur google, pour viter les sites r serv s, qui vendent fort cher, leur acc s   des articles (par exemple 198 dollards pour avoir le droit d'imprimer 30 pages), j'ai pu imprimer, sans autre frais que le papier et la consommation de mes cartouches d'imprimante, deux articles de Bajaj (savant disciple et collaborateur d'Abhyankar).

Ces deux articles comprenaient des formules g n rales de param trisation des surfaces cubiques non r gl es, ayant au moins deux droites non coplanaires. Le principe tait le m me que celui que j'avais utilis , pour param trer la surface de Clebsh, ce qui fait toujours plaisir : Ces deux droites $\ell_1(u)$ et $\ell_2(v)$, tant param tr es, on consid re la s cante $P1(u)P_2(v)$ (P_i tant un point variable de ℓ_i). La s cante $P_1(u)P_2(v)$ qui coupe d ja la cubique en ces deux points, la recoupe en un troisi me $P(u, v)$, que l'on rep re par une repr sentation barycentrique   points de base P_1 et P_2, sous la forme $\boxed{\mathbf{P(u,v) = \frac{a\ell_1(u)+b\ell_2(v)}{a+b}}}$.

Mais ce qui m'a le plus frapp , c'est que les valeurs de $a(u, v)$ et $b(u, v)$ taient explicit es en fonction de l'op rateur diff rentiel nabla ∇. (*)

Bien s r aucune d monstration pr cise n' tait donn e, il fallait chercher des indices dans l'introduction, qui signalait un article de Sederberg et Snoveny, qui lui m me ne justifait pas tous les calculs, article que j'ai re u le premier d cembre, avec l'impatience que vous devinez.

Il serait goiste de ma part de vous les cacher (la r servation de certaines informations intellectuelles, qui tait encore en usage par certains initi s, pourtant charg s d'une mission officielle, il y a dix ans, se r duit heureusement de plus en plus gr ce   internet !).

$f(P) = 0$ tant l' quation homog ne de la surface cubique consid r e, f tant un polyn me homog ne, du troisi me degr , des coordonn es homog nes de P, posons avec les notations ci dessus $s = \frac{a}{a+b}$ et $t = \frac{b}{a+b}$. $P = sP_1 + vP_2$, et recherchons les param tres barycentriques s, t de P au moyen de la condition $f(sP_1 + tP_2) = 0$.

L'identit de Taylor pour les polyn mes de quatre variables (X, Y, Z, T) et de degr 3, donne, avec les notations symboliques classiques, et la convention d'affectation finale de sP_1 dans f et des d riv es :

$f(P) = f(sP_1) + ((tP_2).\nabla)f(sP_1) + \frac{1}{2!}((tP_2).\nabla)^2 f(sP_1) + \frac{1}{3!}((tP_2).\nabla)^3 f(sP_1)$ soit par homog n it des diff rents l ments f $f(P) = s^3 f(P_1) + s^2t((P_2).\nabla)f(P_1)) + st^2\frac{1}{2!}((P_2).\nabla)^2 f(P_1)) + t^3\frac{1}{3!}((P_2).\nabla)^3 f(P_1))$

Mais comme P s' crit aussi bien $tP_2 + sP_1$ on a aussi :

$f(P) = t^3 f(P_2) + t^2s((P_1).\nabla)f(P_2)) + ts^2\frac{1}{2!}((P_1).\nabla)^2 f(P_2)) + t^3\frac{1}{3!}((P_1).\nabla)^3 f(P_2))$

Mais comme cette formule est valable quel que soit s, on a l'identification des coefficients des puissances de s : $\frac{1}{3!}(P_2).\nabla)^3 f(P_1) = f(P_2)$ et $\frac{1}{2!}(P_2).\nabla)^2 f(P_1) = ((P_1).\nabla)f(P_2)$, ce qui donne en rempla ant dans la premi re formule :

$\boxed{\mathbf{f(P) = s^3 f(P_1) + s^2 t((P_2).\nabla)f(P_1)) + st^2((P_1).\nabla)f(P_2)) + t^3 f(P_2)}}$

Comme $f(P_1) = f(P_2) = 0$, la condition pour que P soit le troisi me point de rencontre de P_1P_2 avec la surface cubique est : $st\big[s(P_2.\nabla)f(P_1) + t(P_1.\nabla)f(P_2)\big] = 0$

Comme s, t ne sont pas nuls (les droites choisies ne passent pas par des points doubles), ou simplement par prolongement d' galit par continuit , on a :

$s(P_2.\nabla)f(P_1) + t(P_1.\nabla)f(P_2)$ et l'on a (n'oublions pas que $s + t = 1$)

$\boxed{\mathbf{s = \frac{(P_1.\nabla)f(P_2)}{(P_1.\nabla)f(P_2)-(P_2.\nabla)f(P_1)}} \text{ et } t = \frac{(P_2.\nabla)f(P_1)}{(P_2.\nabla)f(P_1)-(P_1.\nabla)f(P_2)}}$

On peut prendre : $a = (P_1.\nabla)f(P_2)$ et $b = (P_2.\nabla)f(P_1)$, mais on remarque que d'apr s l'identit d'Euler $(P.\nabla)f(P) = 3f(P)$ et donc $(P_2.\nabla)f(P_2) = (P_1.\nabla)f(P_1) = 0$ ce qui permet les formules plus sym triques

$\boxed{\mathbf{a = (P_1 - P_2).\nabla)f(P_2) \text{ et } b = (P_1 - P_2).\nabla)f(P_1)}}$

Il est facile de v rifier, que cela donne une repr sentation param trique rationnelle de la surface cubique, les num rateurs tant du quatri me degr en (u, v), les d nominateurs du troisi me.

On peut aussi param trer, les surfaces cubiques en utilisant les polyn mes de Bernstein-B zier.

---

(6) Les doubles six de Schl fli :

(*) *Op rateur bien connu des physiciens, et des math maticiens, ainsi nomm car c'est le nom d'un instrument de musique h bra que, qui a la forme d'un delta Δ renvers :*

on le voit sur le site http://www.rakkav.com/kdhinc/pages/instruments.htm

Pour tablir les propri t s souhait es, il est souhaitable que l' quation de la surface cubique soit sous une forme la plus simple possible.

Dans les ann es 1850, Clebsch, Salmon ont tabli que toute surface cubique avait son premier membre qui pouvait s' crire sous la forme dite "pentah drale", c'est   dire comme somme des cubes de cinq formes lin aires. Malheureusement leur justification explicit e (20 quations avec 20 inconnues, "donc possible"), n'envisage pas un seul instant la possibilit d'incompatibilit . En fait, leur argumentation tait implicitement cach e, derri re la th orie qu'on appelle maintenant "theory of apolarity", dont les initiateurs sont ..... Clebsch, Lasker (1904), Richmond (1902), Sylvester et Wakeford (1919). Des travaux r cents (1993, 1999) de Richard Ehrenborg et Gian-Carlo Rota, sont accessibles sur le Web et imprimables pour les lecteur avides d'approfondir. C'est une th orie qui utilise les cat gories, les op rateurs de d rivation et value le rang des matrices jacobiennes, pour utiliser le th or me des fonctions implicites.

Autrement, il nous faut donc chercher une argumentation irr futable.

Envisageons tout d'abord un polyn me de n variables, homog ne et de degr p. Le nombre de ses coefficients est (voir Comtet Analyse combinatoire tome I PUF 1970 page 25-26) est C^p_{n+p-1}. Dans le cas qui nous concerne $p = 3$ et le nombre de coefficients est $C^3_{n+2} = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{6} \begin{cases} n=1 & 1 \text{ coefficient} \\ n=2 & 4 \text{ coefficients} \\ n=3 & 10 \text{ coefficients} \\ n=5 & 20 \text{ coefficients} \end{cases}$

Or comme une forme lin aire n variables d pend de n coefficients arbitraires, si nous voulons mettre le premier membre sous la forme de la somme de k cubes de telles formes, pour assurer les m mes degr de libert pour les deux membres, il faut que $k.n \geq C^3_{n+2}$. Donc $k \geq \frac{(n+2)(n+1)(n-1)}{6} \begin{cases} n=1 & k=1 \\ n=2 & k=2 \\ n=3 & k \geq \frac{4}{3} \text{ Il faut prendre } k=4 \\ n=4 & k=\frac{20}{4}=5 \end{cases}$.

Dans le cas $n = 4$, la forme pentah drale assure donc, le m me degr de libert . Encore faut-il que le choix des coefficients des cinq formes lin aires $l_i = a_i x + b_i y + c_i z + d_i t$ telles que $f = \sum_{i=1}^{5} l_i^3$ soit possible. Par exemple que le jacobien des expressions des coefficients des mon mes $x^\alpha y^\beta z^\gamma t^\delta$ avec $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 3$, soit non nul, pour que nous puissions appliquer le th or me des fonctions implicites.

Maple par le programme suivant, nous aide   calculer ce d terminant d'ordre 20.

$A := sum((a[i]*x+b[i]*y+c[i]*z+d[i]*t)^3, i = 1..5); A := collect(expand(A), [x, y, z, t]); B := convert(A, list) : Bx := map(u- > coeffs(u, x), B) : By := map(u- > coeffs(u, y), Bx) : Bz := map(u- > coeffs(u, z), By) : Bt := map(u- > coeffs(u, t), Bz); nops(Bt);$

$with(linalg) : Jac := jacobian(Bt, [seq(op([a[i], b[i], c[i], d[i]]), i = 1..5)]); f :=' f' : for\ j\ from\ 1\ to\ 20\ do\ f[j] := [seq(Jac[j, i]/3, i = 1..20)]; od;$

(le d terminant est divis par 3^{20})

JacSimp:=array(1..20,1..20,[seq(f[i],i=1..20)]);$det(JacSimp)$; (En fait Maple V.5 patine et il faut avoir recours   un ordinateur puissant)

La seule analyse s rieuse des cas o   l' quation pentah drale est possible est dans le livre de Segr cit dans la bibliographie.

---

(7) Lien avec la th orie des groupes :

Puisque, comme nous venons de le voir, un double six d crit le comportement d'incidence des droites, le groupe sym trique d'ordre six, op re par permutations sur un double six en changeant les colonnes, et en pr servant les intersections mutuelles. Comme il y a 36 double dix, le groupe des automorphismes op rant sur les 27 droites de la surface cubique consid r e est de cardinal $6!.2.36 = 51840 = 2 * 25920$.

Ce groupe est aussi le groupe de Weyl $W(E_6)$, pour cela voir [L1] et [A1].

Un alg briste, nous int r sserait en expliquant pourquoi la g om trie symplectique intervient dans cette question des 27 droites : notant $PSp_n(\mathbb{K})$ ou $(PSp(2r, \mathbb{K})$ le groupe projectif symplectique, quotient du groupe $Sp_n(\mathbb{K})$ par son centre, on constate qu'ils sont simples   l'exception de $PSp_2(F_2)$, $PSp_2(F_3)$ et $PSp_4(F_2)$.

Et justement ce dernier groupe $PSp_4(F_2)$ qui est d'ordre 25920 est le groupe des 27 droites d'une surface cubique non r gl e ! (La premi re ligne $E_1, ..., E_6$ d'un double six tant donn e, il y a 27 choix pour E_1, 15 pour E_2, 10 pour E_3, 6 pour E_4, 2 pour E_5 et 1 pour E_6 soit l'ordre de G est $27.16.10.6.2 = 51840 = 2 * 25920$. (Il y a 25920 isom tries positives et 25920 isom tries n gatives)

(Un groupe G est dit simple, s'il n'a pas d'autres sous groupes H distingu s (gHg^{-1} reste dans H quel que soit $g \in G$), que lui m me et $\{1\}$)

---

(8) Probl mes soulev s :

Georges VALIRON (Major d'Agr gation 1908) disait : "chaque probl me r solu en soul ve deux autres". Il n'est donc pas   craindre que la recherche s'arr te par   puisement des sujets ! Cette   vidence est se confirme avec les questions que soul vent ce travail.

Voici quelques unes des questions qui viennent   l'esprit en   crivant cet article.

- Trous D' vidence la surface de Clebsch (Hunt ou Todesco) a visuellement quatre trous (hole) un central et trois lat raux (voir figure) : comment le justifier ? Comment intervient le degr de l' quation ? comment interviennent les coefficients ? Le genre (nombre de trous) d'une surfaces alg brique, non born e s'exprime t-il en fonction du degr ?

(Voir la th orie de Morse (th or me de Morse est un cas particulier de celui de Hopf lui m me des r sidus) ; Ap ry dit que $\chi(S) = 2-2t$, encore faut-il calculer la caract ristique d'Euler Poincar de la surface de Clebsch : Par la formule de Gauss-Bonnet pour une sous-vari t compacte X de dimension d on a $\int_X K_d(X)\delta = \chi(X).VolumeS^{n-1}$; Voir Berger 153 297, Gramain, Godbillon, 185, rapport d'Agreg 1975, Rideau 21, Delachet Que sais-je la g om trie comptemporaine p 117 ; Lehmann 339 ; Cours de g om trie alg brique de Dieudonn (PUF 1974) p 169-208 ;

Vu les grands noms de math maticiens intervenant et les th ories en jeu dans cette th orie et cit es dans le dernier ouvrage   propos de ce probl me du genre, il n'est pas tonnant que ce probl me ne soit ni simple ni vident : Leray, Weil, Kodaira, Hodge, Severi, Zariski, Cartan, Serre, Dolbeault, Spencer, Hirzebruch, Thom, Todd, Eger, Enriques, Picard, Castelnuovo, Grotendieck, Attiyah-Singer, Nœther, Krull, Chevalley, Borel, Cartier, Uzkov ; Th orie des Faisceaux et des sch mas ; Th or me de Riemann-Roch, Vari t s, cohomologie, espace fibr , diviseurs, dualit de Poincar , Classes de Chern, caract ristique d'Euler Poincar , Nombres de Betti, invariants, cobordisme, suite exacte, plurigenre, d faut, cat gories, foncteurs, K-th orie, groupes semi-simples, Th or me des z ros de Hilbert, id aux maximaux, topologie tale, localisation ;

On a m me la surprise en tapant "hole of surface avec google de tomber sur l'entropie de Schwarzchild, math maticien, astrophysicien, dont le nom m'avait t signal dans un remarquable article du Monde - ((*) note : du temps o ce quotidien publait des synth ses scientifiques de qualit , "bandes d'intellectuels allez lire" le monde criaient les badauds aux manifestants de 1958) dont l'auteur tait James Lequeux, du six ao t 1964 page 7 - qui a calcul le rayon des trous noirs ($R_S = \frac{2MG}{c^2}$) et (Chandrasekar lui a calcul le seuil d'effondrement (entre 0.8 et 2 masses solaires)   partir duquel une toile peut devenir naine blanche).

Tout en lisant les livres ou articles consacr s   cette th orie et les grands noms rencontr s, on a vraiment l'impression d' tre en altitude avec les Albatros... Abel, B zier, Borel, Cayley, Coxeter, Cremona, Enriques, Falting, Fischer, Galois, G del, Gr bner, Grotendiek, Hadamard, Heine, Hilbert (et son th or me Nullstellensatz), Hunt, Jacobi, Jordan, Klein (et son programme d'Erlangen, de recherche des invariants et des sym tries), Kronecker, Kummer, Lie, L roth, Munford, Noether, Picard, Pl cker, Ramanujan (pour Diophantienne de degr 3), Reid, Rieman, Roch, Rye, Salmon, Serret, Shafarevich, Steiner, Sylvester, Veron se, Waerden, Weierstrass, Weil, Zariski...

On rencontre aussi des notions importantes : syzygies (Hunt p 85), covariance, fonctions theta, modulaire, elliptique,....

- composantes pentah drales d finition pr cise, simple, l mentaire cr dible et g n rale.....
- Changement de composantes projectives Raison et technique des Choix de Hunt, Todesco, Ferrarese, pour rejeter   l'infini certains points singuliers, points doubles, sym tries, forme (dont les trous) ?
- Clebsch particularit s de la surface de Clebsch qui explique son choix et son int r t (voir articles imprim s sur le web) (page 95 du chapitre 4 du cours en ligne de Hunt : c'est parce qu'elle est la seule surface cubique avec exactement 10 points Eckardt)
- 3, 7, 15 ou 27 droites Pourquoi ce saut de nombre de possibilit s de droites (Juel, Segre 1942, Le Lionnais 1983).
- R le de Cr mona (pr nom Luigi sic) p 87 et note p 95 du cours chapitre 4 de Hunt (corollaire 4-1-11) ; Cr mona est aussi c l bre par sa double g n ration (qui sert en th orie des engrenages) des courbes trocho dales.
- cubiques r gl es Pourquoi les seules cubiques r gl es sont $ZX^2 - TY^2 = 0$ et $Z^3 + X(XZ + YT) = 0$.
- quation aux d riv es partielles des surfaces r gl es Trouver s'il existe et si oui l'exprimer une quation diff rentielle des nappes r gl es (ruled). La seule avanc e tangible et pr cise que j'ai trouv e est dans le dictionnaire EDM 17-E (invariants of Algebraic surfaces) page 65 seconde colonne qui dit apr s les nombres de Betti et un travail de Serre (exemple de surface alg brique telle que $h^{0,1} \neq h^{1,0}$) (M daille Fields 1954 et prix Abel 2003), qu'une surface r gl e est telle que $P_n = 0$ et $P_{12} = 0$ d'apr s un th or me de Enriques-Kodaira-Safarevic.

Monge en 1850 a obtenu une quation diff rentielle $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ des surfaces r gl es des sculpteurs (cause du coup de ciseaux) : $z = xF(\frac{y}{x}) + G(\frac{y}{x})$. (Voir par exemple le premier site obtenu en cherchant par google : partial differential equation ruled surfaces).

Dans le cours de l'École Polytechnique (des majuscules forc ment) de Jacques Chapelon (cit d'ailleurs dans le livre de Schwartz, un math maticien aux prises avec le si cle) 2 me division 1948-1949 page I.38 est donn e l' quation aux d riv es partielles des surfaces r gl es $z = f(x, y)$, admettant le plan (x, y) comme plan directeur. Elle est (notations de Monge) $\boxed{\mathbf{q^2r - 2pqs + p^2t = 0}}$; En faisant le changement de variables $X = z, Y = x, Z = y$, ce qui revient chercher la surface sous la forme $y = F * (z, x)$, cette quation devient $T = \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$, ce qui donne $y = C_1(z)x + C_2(z)$.

Dans son monumental "trait de g om trie analytique trois dimensions" seconde partie, dit par Gauthier Villars en 1892, apr s avoir t traduit de l'anglais par O. Chemin, page 223-224, Salmon, propose la m thode suivante pour trouver "l' quation diff rentielle g n rale des surfaces r gl es (c'est dire des surfaces engendr es par le mouvement d'une ligne droite) :

Les quations de la droite g n ratrice sont $z = c_1x+c_3$, $y = c_2z+c_1$ et la famille de surfaces s'esprime en rempla ant c_2, c_3, c_4 par des fonctions arbitraires de c_1. En diff rentiant, nous avons $p+mq = c_1$, $m = c_2$. Diff rencions la premi re de ces quations (m est constant d'apr s la seconde), nous avons : $r + 2sm + tm^2 = 0$".

(On utilise les notations dites de Monge : $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$, $r = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $s = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $t = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$)

"Comme cette expression renferme encore m ou c_2, dont nous ne connaissons pas l'expression en fonction des coordonn es, nous devons diff rentier nouveau, ce qui nous donne : $\alpha + 3\beta m + 3\gamma m^2 + \delta m^3 = 0$, o $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont les d riv es troisi mes.

En liminant m entre les quations du deuxi me et du troisi me degr en m (NDT : par exemple au moyen du r sultant de Sylvester), on a l' quation diff rentielle partielle cherch e." fin de la reproduction du paragraphe du livre de Salmon).

- Passage d'un syst me de double six un autre Voir Salmon p 403 et Hunt.
- Couple de droites id al pour la repr sentation param trique Parmi les 27 droites, quels couples de droites non coplanaires, faut-il choisir pour avoir la meilleure repr sentation param trique (meilleure = plus simple, plus sym trique, sans simplification parasite...)
- Nombre de couples de droites coplanaires, non coplanaires ; nombre de triplets de droites coplanaires ;
- Parasitisme de la repr sentation param trique pourquoi le trac par Maple de la nappe obtenue (repr sentation param trique) donne tant de bouts de plans parasites ?
- surface porteuse Comme une question de W7 en UPS 1980, (une biquadratique tant donn e, est-elle l'intersection de deux quadriques) 27 droites tant donn es, existe-t-il une surface du troisi me degr porteuse ?
- Trac s informatiques Il serait int ressant de savoir comment (quels algorithmes ? quels programmes) font les informaticiens qui donnent des repr sentations sur le web pour faire appara tre toutes les droites sur la surface. Quelles est la gestion, la p riodicit des num rotations diff rentes des solutions donn es par Maple dans les programmes d'Esculier, permettant de trouver les quations des 27 droites et les points Eckardt et les diff rents double six.
- Taylor dans la param trisation Au moment de la param trisation g n rale utilisant l'op rateur nabla ∇, on a vu appara tre une expression particuli re de la formule de Taylor, dans le cas d'un polyn me homog ne de degr 3. Cette forme particuli re est-elle g n ralisable, et sous quel aspect, pour des polyn mes de degr sup rieur et m me pour la partie r guli re dans le cas de fonctions de classe suffisante ?
- Apparition de trou et droite simple Dans la classification d'Abhyankar, une transformation projective pr s on peut (hors des cas coniques) se ramener aux deux types de surfaces cubiques r gl es : $F_3 : y^3 + xy + zx^2 = 0$ et $F_4 : y^3 + xy + zx^2 + y^2 = 0$: pourquoi le simple rajout de y^2 dans le premier membre, modifie tellement, d'une part le nombre de trous qui passe de 0 1 et le nombre de droites simple d'appui des g n ratrices, qui passe aussi de 0 1 ?
- Ligne de striction Comment rechercher la ligne de striction d'une surface r gl e connue par son quation implicite ?
- Ligne de striction et ligne double Y-a-t-il un lien entre la ligne de striction d'une cubique r gl e et sa ligne double ? Si oui (c'est vrai pour les conoides de Pl cker, Zindler, Whitney), comment le d montrer, sans trop de calculs ?
- Particularit s des points de l'ar te de rebroussement d'une surface d veloppable, sur cette surface : multiplicit , singularit ?

(9) Conclusion :

Pal o-math matiques, sujet exotique ? th me d suet ou d pass ? que nenni ! D'une part l'intervention du groupe c l bre $PSp_4(F_2)$, d'autre part des travaux r cents (de Naschie en 2001 voir [S8]) sur la th orie heterotic des cordes (sorte de th orie des hyper-cordes) tendant donner une mod lisation universelle de l'univers et de l'espace temps, montrent qu'il n'en est rien.

Sans entrer dans le d tail, Naschie a montr que la dimension de Haussdorff (dimension fractale), du champ des cordes h t rotiques tait $D^{-} = 26.18033989$. Et comme 27 est la dimension enti re la plus proche et sup rieure, une mod lisation a fait le parall le entre l'espace temps et l'alg bre des 27 droites d'une surface cubique, d'autant que pour un double six de Schl fli les 15 droites compl mentaires rencontrent quatre lignes du double six, d'o un parall le avec les quatre dimensions de l'espace temps !

M me les surfaces r gl es sont d'actualit , avec l'utilisation de l'intersection de telles surfaces pour le trac graphique par ordinateur. Ceci dans les notions de "ray tracing" m thode issue du "Computer Aided Graphic Design" du rendu des trac s en trois dimensions : on imagine un point d'o partent les rayons lumineux et un point o se trouve l'oeil de l'observateur, on suit chaque rayon mis, on calcule la fa on dont il se refl te sur les obstacles, cela permet de rendre de mani re r aliste les effets lumineux : reflets, influence d'une couleur sur une autre, moir ,.... Et donc dans l'infographie qui a de multiples applications (jeux vid o, conception assist e par ordinateur, dessins anim s (synth se d'image), visualisation d'une cuisine, de l'int rieur d'une voiture, d'un immeuble, d'un grand projet (trac d'autoroute,...), de son impact sur l'environnement ; le tout avant leur r alisation, et sans faire appel aux maquettes, visualisation de mol cules, de la fa on dont elles int ragissent,...

La surface de Clebsch et les points Eckardt interviennent aussi r cemment en addition et conservation des moments angulaires en th orie des semi-conducteurs, en injection du spin dans les m taux ferromagn tiques comme le Gallium nitride. Et grace au th or me de Wigner-Eckardt en spectroscopie et m canique tensorielle et quantique.

Rappelons que d s 1887 Jordan tablit le lien entre le groupe des 27 droites et la trisection des fonctions hyper-elliptique, l' quivalence entre les deux probl mes tant montr e par Klein en 1887.

---

(10) Mini Glossaire :

Pour faciliter la lecture, au lecteur non math maticien, voici un petit glossaire des diff rents termes rencontr s.

- **ar te de rebroussement :** les plans tangents le long des g n ratrices d'une surface r gl e, d pendent de deux param tres celui du point de la g n ratrice sur la courbe directrice, et celui du point consid r sur cette g n ratrice. Lorsque le plan tangent est invariant le long de cette g n ratrice, la surface r gl e est dite d veloppable, et on d montre que les g n tratrices sont tangentes une courbe appel e ar te de rebroussement. Lorsque la surface d veloppable est un c ne ou un cylindre, cette courbe est r duite un point ventuellement rejet   l'infini.
- **c ne :** de sommet le point S et de directrice une courbe (C) : surface engendr e par les droites (appel es g n ratrices du c ne) astreintes contenir S et s'appuyer sur (C).
- **cono de :** d'axe Δ, de plan directeur (P), s cant l'axe, de courbe directrice (C) : surface engendr e par les droites (appel es g n ratrices du cono de) astreintes rester parall les (P), rendontrer Δ et s'appuer sur (C). Un cono de est dit droit, si la direction de Δ est orthogonale celle de (P). Il est dit de Pl cker si la courbe directrice est une ellipse dans un plan s cant Δ et (P). On le rencontre souvent en m canique, cause de la th orie de l'axe central du torseur des vitesses d'un solide. (voir ces derniers mots sur le web ou dans un livre de sp ciales des ann es 1960).
- **Cubique :** (surface cubique) surface du troisi me degr , c'est dire dont l' quation ne comprend que des termes de degr ≤ 3, par rapport aux coordonn es x, y, z.
- **Cylindre :** de direction le vecteur non nul u et de courbe directrice (C) : surface engendr e par les droites astreintes tre parall les u et rencontrer (C) ; en g om trie projective, c'est un c ne dont le sommet est le point l'infini de la direction u.
- **D veloppable :** une surface r gl e d veloppable est une surface telle que pour toute g n ratrice, le plan plan tangent est le m me en tout point de cette g n ratrice. C ne, Cylindre sont des surfaces d veloppables. Outre ces cas, une surface d veloppable est engendr e par les tangentes une courbe, appel e ar te de rebroussement de la surface. (si la courbe est plane, la surface d veloppable est tout ou partie d'un plan).
- **Double six :** C'est un ensemble de $12 = 2 * 6$ droites prises parmi les 27 de la surface cubique (non r gl e) dispos es de la mani re suivante $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix}$, telles que a_i ne rencontre pas a_j pour $i \neq j$, a_i ne rencontre pas b_i, mais a_i renontre b_j pour $i \neq j$. Cette d nomination a t faite par Schl fli ; Il y a 36 doubles six sur la cubique, la donn e d'un seul permettant de construiire tous les autres. Salmon employait le terme "double sixain" terme de casino, plus appropri que double six, qui est un terme de jeu de dominos !
- **Eckardt :** Points Eckardt d'une surface cubique non r gl e : points o trois droites situ es sur la cubique se rencontrent. (elles ne sont pas toutes s cantes). Par exemple pour une cubique comportant 27 droites il n'y a que 10 points Eckardt. Le plan tangent en un tel point est "tritangent", il coupe la surface suivant les trois g n ratrices qui contiennent le point Eckardt de contact. Ces points ont t g n ralis s par Cheltsov (utiliser google). Les seuls renseignements dont nous disposons sur l'auteur sont dans le dictionnaire Poggendorf : Friedrich Emil Eckardt (Chemnitz 1844 - Chemnitz 1875) ; un article parvenu P ques 1875, dit en 1876 est cit dans la bibliographie

de Karen Smith. C'est beau de laisser un nom la post rit juste la derni re ann e de sa vie ! Un portrait et une biographie semblent introuvables, m me par le Web.

• **Homog nes :** coordonn es (X, Y, Z, T) li es aux coordonn es ordinaires (x, y, z) par $x = \frac{X}{T},\ y = \frac{Y}{T},\ z = \frac{Z}{T}$. $X = kx,\ Y = ky,\ Z = kz,\ T = k)$; Elles sont introduites pour permettre le traiter les points l'infini ($T = 0$) comme des points ordinaires. Pour d finir un point le quadruplet (X, Y, Z, T) doit tre diff rent de $(0, 0, 0, 0)$.

• **pentah drale :** Coordonn es introduites par Sylvester, permettant d' crire l' quation d'une surface cubique r gl e, sous la forme $a_1x_1^3+a_2x_2^3+a_3x_3^3+a_4x_4^3+a_5x^5 = 0$ avec $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 0$, les x_i tant des coordonn es projectives. Dans le cas de cubique 27 droites ce type d' quation est toujours possible. Segr montr , que dans le cas d'autres cubiques, ceci n' tait pas toujours possibles, contrairement aux affirmations de Sylvester, Cayley, Clebsch, Salmon : 20 quations en les 20 coefficients des x_i en les coordonn es homog nes, "donc" toujours possible. (sans souci de compatibilit).

• **Pl ckeriennes :** coordonn es pl ckeriennes d'une droite D : (a, b, c) tant les composantes d'un vecteur directeur V de D dans un rep re orthonorm , et $OK = OM \wedge V$ le moment en O du vecteur "glissant" (D, V), M tant un point quelconque de D. OK ayant pour composantes (l, m, n) le sextuplet (a, b, c, l, m, n) est appel syst me de coordonn es pl ck riennes de la droite D. Il est d fini un facteur multiplicatif, non nul, pr s.

• **Point critique** d'une surface d' quation $f(x, y, z) = 0$, f tant de classe c^1 dans un ouvert de $\mathbb{R}^3$: point qui v rifie $f'_x = f'_y = f'_z = 0$.

• **projectives :** On d finit des coordonn es projectives (X', Y', Z', T') partir des coordonn es homog nes (X, Y, Z, T), par $\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ T' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix}$, la matrice M d'ordre 4 tant r guli re c'est dire de d terminant non nul. Elles permettent de consid rer tous les points, sans particulariser les points l'infini. Le t tra dre de r f rence correspondant est d fini par les plans $X' = 0, Y' = 0, Z' = 0, T' = 0$.

• **R gl e :** une surface est dite r gl e si elle peut tre engendr e par des droites, c nes, cylindres, cono des, sont des surfaces r gl es.

• **Striction :** Ligne de striction d'une surface r gl e ; On d montre que le plan tangent en un point P d'une g n ratrice d'une surface r gl e non d veloppable, tourne autour de cette g n ratrice, lorsque P d crit cette droite. La position l'infini s'appelle le plan asymptote ; il existe un point dit point central de la g n ratrice o le plan tangent est perpendiculaire au plan asymptote. Le lieu du point central s'appelle la ligne de striction de la surface r gl e. La nappe r gl e tant d finie par $P(u, v) = M(u) + v\ell(u)$, le param tre v_c du point central de la g n ratrice associ e $g(u) = (M(u), \ell(u))$ est d fini par $v = -\frac{M'(u).\ell'(u)}{||\ell'(u)||^2}$. La ligne de striction est le lieu du $P(u, v_c)$. Dans le cas des surfaces r gl es alg briques de degr ≥ 3, une question ouverte, semble t'il, est de savoir le lien entre la ligne de striction et la ligne double.

• **Symplectique :** (g om trie, automorphisme, espace vectoriel) : Un espace vectoriel est dit symplectique, s'il est muni d'une forme bilin aire altern e (ou antisym trique si le corps n'est pas de caract ristique 2) non d g n r e. Un espace euclidien lui est tel que la forme bilin aire associ e est d finie (0 est le seule vecteur dont le carr scalaire est nul) positive $(x.x \geq 0)$.

• **Syzygies :** D'un mot grec qui signifie "r union" : (notion introduite par par Sylvester en 1853, g n ralis e et clarifi e par Hilbert en 1890) ; en astronomie une syzygie est une conjonction ou opposition d'une plan te avec le Soleil, par rapport la terre ; Sylvester parlait de syzygetic ou d'azygetic pour des paires de doubles six : un double six donn est zyzygetic 15 doubles six et azygetic pour les 20 autres. Pour une d finition plus pr cise voir les dictionnaires de math matiques EDM ou Bouvier, George, Le Lionnais.

---

(11) BIBLIOGRAPHIE et RÉFÉRENCES (*)

[1] S. Abhyankar memoirs of the college of science, university of Kyoto,
series A, Vol. XXXII. Mathematics No. 3, 1960. Cubic surfaces with a double line.

[2] Aubonnet et Guinin, exercices d'oraux crus 86-87 (Br al 87) p 252-253
et les grands classiques (Br al 1989) p 329-330.

[3] Aubonnet, Joppin et Guinin, exercices d'oraux crus 85-86 (Br al 86)

(*) *Les lecteurs qui d sirent le source d'une bibliographie moins s che, moins format e, moins impersonnelle, moins froide, moins technocratique, plus vivante, plus argument e, plus d taill e, plus comment e, classifi e, originale, novatrice, plus universelle puisque l'ordre alphab tique des r f rences n'est pas perturb d'un article l'autre (comme dans les livres de Barth, Berger, Hunt, Reid (article), Brundu, Karen E. Smith,..... qui pr c dant les noms des auteurs par deux ou trois lettres entre crochets, caract ristiques du patronyme l'auteur), alors qu'un num ro dans l'ordre d'apparition dans l'article l'est, avec un zeste de fantaisie et d'humour et de po sie, la r f rence pr cise de tous les documents trouv s sur sites, peuvent me le demander.*

p 293, 295.
[4] Bajaj, Holl, Netravali : rational paretrization of real cubic surfaces p 1-29.
[5] Becirspahic et Loiseau : L'oral de math matiques 1995-1996 (Br al 1996)
p 227-228.
[6] M. Berger, B. Gostiaux : g om trie diff rentielle : vari t s, courbes et
surfaces (PUF 1992) p 411.
[7] Bouligand math matiques par les probl mes (Vuibert 1962) p 523 ;
[8] Bouvier, George, Le Lionnais : dictionnaire des math matiques (PUF 1993)
[9] J. Brette et F. Le Lionnais : Les nombres remarquables
(Hermann 1983) p 83.
[10] J.W. Bruce, C.T.C. Wall : on the classification of cubic surfaces
; J. Londeon Math. Soc. (2), 19 (1979) p 245-256.
[11] M. Brundu, A. Logar : classification of cubic surfaces with
computational methods : Mathematics Subjects Classification (1991) ; 45 pages accesibles sur le Web.
[12] M. Brundu, A. Logar : parametrization of the orbits of cubic surfaces :
Transformation Groups vol 3, num 3, 1998 ; 31 pages accessibles par le web.
[13] Bulletin de l'APM : 396 (d cembre 1994) p 605 et 406 (octobre 1996)
p 605-609.
[14] B.W. Char, K.O. Geddes, G.H. Gonnet, M.B. Monagan, and S.M. Watt.
Maple V user's Guide (Watcom Publications Limited, Waterloo, Ontario, 1990).
[15] Commissaire et Cagnac : cours de math matiques sp ciales tome 2
(Masson 1955) p 391.
[16] A. Delachet : la g om trie contemporaire (PUF 1965) p 119-121.
[17] I.V. Dolgachev et A. Verra : Topics in classical Algebraic Geometry
; 180 pages sur le web 13-12-2003 p 47-64 et 7-14 (apolarity) et 23-29.
[18] I.V. Dolgachev et A. Verra : Topics in classical Agebraic Geometry
Part I ; 187 pages sur le web le 13-01-2004.
[19] J. Dollon : Probl mes d'Agr gation (math matiques sp ciales) (Vuibert 1956)
p 103-113 : probl me d'agr gation 1929 : surface cubique r gl e.
[20] R. Ehrenborg : On apolarity and generic canonical forms : Journal of Algebra
213, 167-194 (1999) ; documment accessible sur le web.
[21] R. Ehrenborg, G.C. Rota : Apolarity and canonical forms of homogeneous
polynomials : Erop. J. Combinatorics (1993) 14, 157-181 ; documment accessible sur le web.
[22] J. Favard : cours de g om trie diff rentielle locale (Gauthier Villars)
p 201.
[23] Hartshorme : Algebric geometry (Springer Verlag 1977) p 305-409.
[24] Hauchecorne, Suratteau : des math maticiens des A Z (Ellipses 1996) :
voir les entr es Clebsch, Cayley, Salmon, Sylvester.
[25] B. Hunt : Lectures notes in Mathematics : Some geometry of some sp cial
arithmetic quotients (Springer) Isbn 0075-8434.
[26] S. Izumiya, N. Takeuchi, Singularities of ruled surfaces in $\mathbb{R}^3$. Math.
Proc. Camb. Phil. Soc. 130 (2001), p 1-11 (imprimable partir de
http://home.imf.au.dk/esn/titles_1999.html)
[27] Juel : Matematisch Annalen LXXVI 1925 p 549-574.
[28] MATHEMATISCHE MODELLE (Vieweg 1986) : tome 1 p 10-12 et 85 ; tome 2 p 13
[29] P. Montel : bulletin des sciences math matiques 2 me s rie tome XLVIII
ann e 1924 premi re partie : sur la g om trie finie et les travaux de M.C. Juel p 109-129.
[30] D. Mumford Algebraic geometry 5 (springer Verlag 1976) p 172-180.
[31] Nordon : exercices d'oral 1972-1973 (Br al 193) p 73-74.
[32] Poggendorff dictionnaire (Verlag 1937) voir les entr es Juel p 717, 1261 ;
et (Verlag 1925) p 599
[33] H. Pottmann, J. Wallner computational line geometry (Springer 2001).
[34] Probl me de Centrale 1994.
[35] E. Râmis : exercices de g om trie et de cin matique (Masson 1969) page 196-197.
[36] M. Reid : Undergraduate Agebraic geometry (London Mathematical Society,
Students text 12 Cambridge Univerty Press 1988) p 102-106, 115, 126.
[37] G. Salmon : Trait de g om trie analytique trois dimensions
(trois parties) (Gauthier Villars 1892).
[38] L. Schläfli : Gesammelte mathematische Abhandlungen Tome 2 (Verlag 1953)

p 204, 218.
[39] B. Segr : the non-singular cubic surfaces (Oxford Clarendon Press 1942)
p 125-175. (La possibilit pentah drale est p 125-175)
[40] T. Sederberg et J Snively : parametrization of cubic algebraic surfaces
(R Martin editor 1987) the mathematics of surfaces II p 299-319.
[41] I.R. Shafarevich : Basic algebraic geometry (Springer 1988) p 76, 78.
[42] M. Sina : surface cubique g n rale ; revue de math matiques sp ciales
juin 1930 p 217-219 et juillet 1930 p 241-242.
[43] M. Sina : les 27 droites de la surface cubique g n rale ;
revue de math matiques sp ciales f vrier 1941 p 321-325 et mars 1941 p 345-349.
[44] K. E. Smith : Rational and non-rational algebraic varieties ;
article imprimable partir du Web.
[45] Tétrel : solutions de math matiques sp ciales (Croville 1964)
p 213-215. :
[46] G. Valiron : quations fonctionnelles, applications (Masson 1950) p 140.
[47] Weisstein : CRC Concise encyclopedia of mathematics
(elle est aussi sur le site :
http : //mathworld.wolfram.com/ClebschDiagonalCubic.html)

L.G.Vidiani 64 rue de l'EUROPE 21121 FONTAINE LÈS DIJON TEL : 03 80 56 65 53
Adresse email Internet : *lg_vidiani@ipac.fr*

BIBLIOGRAPHIE ET RÉFÉRENCES comment es

Petit livre, qui a attir mon attention sur le th or me de Juel :
[0] A. Delachet : la g om trie contemporaire (PUF 1965) p 119-121.

Ouvrages proposant des cas particuliers du th or me de Juel :
[E1] Aubonnet et Guinin, exercices d'oraux crus 86-87 (Br al 87) p 252-253 et les grands classiques (Br al 1989) p 329-330.
[E2] Aubonnet, Joppin (sans S) et Guinin, exercices d'oraux crus 85-86 (Br al 86) p 293, 295.
[E3] Becirspahic et Loiseau : L'oral de math matiques 1995-1996 (Br al 1996) p 227-228.
[E4] Bouligand math matiques par les probl mes (Vuibert 1962) p 523 ;
[E5] Commissaire et Cagnac : cours de math matiques sp ciales tome 2 p 391 (Masson 1955) : $xyz + a(x^2 + y^2 + z^2) = a^3$.
[E6] Nordon : exercices d'oral 1972-1973 (Br al 193) p 73-74 : trouver tous les cercles sur la cyclique cubique de DUPIN (voir aussi centrale 1986) $z(x^2 + y^2 + z^2) - a(x^2 - y^2) - a^2 z = 0$.
[E7] Râmis : exercices de g om trie et de cin matique (Masson 1969) page 196-197 : Trouver les droites de la surface $x^3 + y^3 + z^3 = a^3$.
[E8] Tétrel : solutions de math matiques sp ciales (Croville 1964) p 213-215 : $(x^2 + y^2 + z^2)(z - a) = (y + mx)^2$ et pour une quartique $y^2 z^2 + 2xyz + x^2 - 2y = 0$.
[E9] Probl me de Centrale 1994.
[E10] Bulletin de l'APM : 396 (d cembre 1994) p 605 et 406 (octobre 1996) p 605-609 : droites de $x^n + y^n + z^n = a^n$.

Dictionnaires ou livres de surfaces :
[D1] Bouvier, George, Le Lionnais : dictionnaire des math matiques (PUF 1993) voir les entr es : Juel, Symplectique, cubique, eikosiheptagramme.
[D2] J. Brette et F. Le Lionnais : Les nombres remarquables (Hermann 1983) l'entr e 27 page 83.
[D3] Hauchecorne, Suratteau : des math maticiens des A Z (Ellipses 1996) : voir les entr es Clebsch, Cayley, Salmon, Sylvester
[D4] Poggendorff (Verlag 1937) voir les entr es Juel p 717, 1261 ; (Verlag 1925) p 599
[D5] Weisstein : CRC Concise encyclopedia of mathematics (elle est aussi sur le site *http : //mathworld.wolfram.com/ClebschDiagonalCubic.html*) avec l'avantage d'avoir les figures en couleur, mais l'inconv nient d'avoir les textes math matiques tronqu s quand on veut les copier coller, car ce sont des images gif) voir l'entr e Clebsch (o la donn e seule du plan de l'infini utilis ne permet pas d' tablir le lien entre les coordonn es ordinaires et les composantes penta driques... pour obtenir son quation dans $\mathbb{R}^3$)
[D6] MATHEMATISCHE MODELLE (Vieweg 1986) : tome 1 p 10-12 et 85 ; tome 2 p 13 (la meilleure repr sentation de la surface de Clebsch avec le double 6 se Schl fli)

Articles :

Outre ceux que l'on trouve sur le web, avec les entr es (parfois jumel es) sous google et images.google : Clebsch, cubic surface, Hunt, Juel, Sylvester, Cayley, Schlafli, double sixes, Salmon, Fischer, 27 theorem Salmon, ...voici quelques articles :

[A1] Hartshorme Algebric geometry (Springer Verlag 1977) p 305-409.

[A2] Bajaj, Holl, Netravali : rational paretrization of real cubic surfaces p 1-29. Que l'on trouve sur le web en fin de premi re page de google en lui demandant "rational parametrization of real cubics, sur le site de citeseer.

L'article analogue trouv de la m me mani re, avec les m mes auteurs, mais avec le titre : Rational parametrization of non-singular cubic surfaces (32 pages) en diff re tr s peu.

[A3] D. Mumford Algebraic geometry 5 (springer Verlag 1976) p 172-180.

[A4] Juel : Matematisch Annalen LXXVI 1925 p 549-574.

[A5] P. Montel : bulletin des sciences math matiques 2 me s rie tome XLVIII ann e 1924 premi re partie : sur la g om trie finie et les travaux de M.C. Juel p 109-129.

[A6] T. Sederberg et J Snively : parametrization of cubic algebraic surfaces (1987) (R Martin editor) the mathematics of surfaces II p 299-319.

(Livres) (en altitude avec les Albatros)

[L1] B. Hunt : Lectures notes in Mathematics : Some geometry of some sp cial arithmetic quotients. (le chapitre 4 se trouve sur le Web) Isbn 0075-8434 (Springer)

[L2] G. Salmon : Trait de g om trie analytique trois dimensions (trois parties) Gauthier Villars 1892. Pages 223, 224 du tome 2 pour l' quation diff rentielle des surfaces r gl es.

[L3] L. Schläfli : Gesammelte mathematische Abhandlungen Tome 2 (Verlag 1953) ; pages 204, 218 pour le nombre de droites d'une surface alg brique g n rale et non r gl e.

(Sites avec des renseignements int r ssants)

[S1] Site Weisstein (taper sous google Clebsch Hunt) :
http://mathworld.wolfram.com/ClebschDiagonalCubic.html

[S2] Site Todesco : http://www.divideo.it/personal/todesco/torino/modelli/clebsch.html

Site avec tr s belle figure : trous, lignes, invers e par rapport celle de JuHel :

[S3] *http://www.oliverlabs.net/algebraicsurface/no_22.html*

Site avec chapitre 4 de Hunt en ligne : quation g n rale des cubiques en penta driques :

[S4] http://www.math.rutgers.edu/courses/535/535-f02/cubics.ps o l'on trouve le chapitre 4 du livre de Hunt.

Site avec double six anim par Java :

[S5] http://enriques.mathematik.uni-mainz.de/csh/mathback/doublesix.html

Site de G rard Chevet avec animation en Java de la surface de Clebsch :

[S6] http://www.saliege.com/dynamique/clebsch/cleb.html

Site historique :

[S7] *http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/*

Site avec la liaison avec la th orie des super-cordes heterotic :

[S8] *http://www-arxiv.org/pdf/physics/*0012033/

Site d'Alain Esculier, avec tous les renseignements pour l'usage du logiciel libre Povray et les animations et calculs de double six.

[S9] *http://aesculier.chez.tiscali.fr/*

Sites avec la surface en b ton [S10] http://www.sciencemuseum.org.uk/on-line/surfaces/art.asp

---

(Groupes sur des surfaces)

[G1] Agreg 1970 (RMS mai 71) groupe de permutation des droites d'un hyperbolo de de r volution ;

[G2] Mines 47 groupe sur une surface (auteur du Pb Jean Desaltre, voir TP 16 et lettre et livre de R mis.

L.G.Vidiani 64 rue de l'EUROPE 21121 FONTAINE LÈS DIJON TEL : 03 80 56 65 53

Adresse email Internet : *lg_vidiani@ipac.fr*

Vidiani (Dijon)
Adresse email Internet : *lg_vidiani@ipac.fr*