ROBERT FERREOL

# ADDITION DES CANCRES, SUITES DE BROCOT ET FRIANDISES ASSOCIÉES.

Cette étude a pour point de départ un article de J. Itard dans un ancien bulletin de l'APMEP (n° 247 de mars 65) sur les suites de Brocot et de Farey, et a été complété d'après des idées d'André Warusfel.

PLAN

1) Addition des cancres.
2) Déterminant de deux éléments de $\overline{\mathbb{Q}_+}$ .
3) Suites de Brocot.
4) Une application à l'approximation des réels : le théorème de Hurwitz.
5) Théorème de Lucas : lien entre suites de Brocot et fractions continues.
6) Bijection de Lucas entre les entiers et les rationnels.
7) Suite des numérateurs des fractions de Brocot.
8) Escalier diabolique de Brocot.
9) Des suites de Brocot incomplètes : les suites de Farey.

## 1) Addition des cancres.

Nous nous placerons dans $\overline{\mathbb{Q}_+}$ dont les éléments possèdent tous un numérateur et un dénominateur (ceux de la fraction irréductible les représentant – par convention $\infty = \frac{1}{0}$ ) et qui est donc en bijection avec l'ensemble des couples d'entiers naturels premiers entre eux.

Le point de départ de tout ceci est l'addition des cancres, ou, comme l'appelle Lucas, la médiation des fractions :

pour $x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{c}{d}$ dans $\overline{\mathbb{Q}_+}$ , $x \oplus y = \frac{a+c}{b+d}$ , (en particulier $\frac{a}{b} \oplus \infty = \frac{a+1}{b}$ et $\infty \oplus \infty = \infty$ ). Nous verrons qu'elle révèle bien plus de trésors qu'elle n'en a l'air.

D'ailleurs, les cancres ne copient-ils pas leurs professeurs, qui font constamment des opérations du style : 9 sur 12 et 5 sur 8 donnent 14 sur 20 !!

L'interprétation géométrique est la suivante :

Dans cette opération, quelques ennuis proviennent de ce que la fraction $\frac{a+c}{b+d}$ n'est pas forcément irréductible (lorsque $x = y$ par exemple) ; si elle est irréductible, nous dirons que $x \oplus y$ s'effectue *sans simplification*, ou qu'elle est *simple*.

Pour cette raison, l'opération $\oplus$ n'est pas associative : par exemple $(1 \oplus 1) \oplus 2 = 1 \oplus 2 = \frac{3}{2}$ , et $1 \oplus (1 \oplus 2) = 1 \oplus \frac{3}{2} = \frac{4}{3}$ ; on devra donc faire attention aux parenthèses.

Elle n'est pas non plus distributive par rapport à la multiplication puisque $2\left(\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{5}$ mais $\frac{2}{2} \oplus \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$ .

Elle est par contre commutative et donne une justification à "l'inversion des cancres" :

**C1 :** $\forall x,y \in \overline{\mathbb{Q}_+} \quad \frac{1}{x} \oplus \frac{1}{y} = \frac{1}{x \oplus y}$ **.**

Elle ne se comporte pas trop mal non plus vis à vis de l'ordre :

**C2 :** $\forall x,y \in \overline{\mathbb{Q}_+} \quad x \leq y \Rightarrow x \leq (x \oplus y) \leq y$ **, et même C$'$2 :** $x < y \Rightarrow x < (x \oplus y) < y$ **(règle des nombres moyens de Nicolas Chuquet).**

Une manière élégante de montrer ces affirmations pour $x$ et $y$ finis est soit d'utiliser la figure ci-dessus, sachant qu'une médiane se trouve entre les côtés, soit de remarquer que

$x \oplus y = \dfrac{b\frac{a}{b} + d\frac{c}{d}}{b+d}$ est la moyenne de $x$ et $y$, pondérée par leurs dénominateurs respectifs.

Voici une relation avec l'addition normale :

**C3 :** $\forall x,y \in \mathbb{Q}_+ \quad \forall n \in \mathbb{N}\ (n+x) \oplus (n+y) = n + (x \oplus y)$ **.**

▹ En effet, si $x = \dfrac{a}{b}$ et $y = \dfrac{c}{d}$ , alors $n+x = \dfrac{nb+a}{b}$ et $n+y = \dfrac{nd+c}{d}$ , ces deux dernières fractions étant aussi irréductibles. Donc

$(n+x) \oplus (n+y) = \dfrac{nb+a+nd+c}{b+d} = n + (x \oplus y)$ .◃

De la même façon :

**C′3 :** $\forall x,y \in \mathbb{Q}_+ \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x,y \leq n \Rightarrow \quad (n-x) \oplus (n-y) = n - (x \oplus y)$.

La conjugaison répétée des propriétés C1 et C3 nous donne un beau résultat liant l'addition des cancres et les fractions continues.

**C4 : si** $x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{a_n + x'}}}}$ **et** $y = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{a_n + y'}}}}$

où $x,x',y,y'$ sont des rationnels $\geqslant 0$ et les $a_i$ des naturels $\geq 1$ pour $i \geqslant 1$ alors :

$x \oplus y = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{a_n + x' \oplus y'}}}}$ .

Par conséquent, si deux rationnels ont les mêmes premiers termes dans leur développement en fraction continue simple, leur somme des cancres également (comme d'ailleurs tout nombre compris entre ces deux rationnels).

## 2) Déterminant de deux éléments de $\overline{\mathbb{Q}_+}$ .

Posons $d(x,y) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$ pour $x$ et $y$ dans $\overline{\mathbb{Q}_+}$ où $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$ sont les représentants irréductibles de $x$ et $y$ ; $d$ est l'initiale de déterminant (appellation que nous conserverons), bien sur, mais aussi celle de distance. D'accord, ce n'en est pas une, mais $d$ vérifie tout de même

**D1 :** $x = y \Leftrightarrow d(x,y) = 0$ **.**

De plus, $d$ pourrait bien aussi être l'initiale de “différence”, car

**D2 :** $x \leq y \Leftrightarrow d(y,x) \geq 0$**, et** $x < y \Leftrightarrow d(y,x) \geq 1$ **.**

La propriété d'antisymétrie du déterminant nous donne :

**D3 :** $d\left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y}\right) = -d(x,y)$.

**D4 : si** $y \oplus z$ **est simple,** $d(x,y) + d(x,z) = d(x, y \oplus z)$

d'où : **D5 : si** $x \oplus y$ **est simple,** $d(x, x \oplus y) = d(x \oplus y, y) = d(x,y)$.

Ceci vaut en particulier si $d(x,y) = -1$ , car :

**D6 : si** $d(x,y) = -1, x \oplus y$ **est simple (et par conséquent** $d(x, x \oplus y) = d(x \oplus y, y) = -1$ **).**

▹ En effet si $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = -1$ , $\begin{vmatrix} a & a+c \\ b & b+d \end{vmatrix} = -1$ , ce qui montre (Bézout) que $a+c$ et $b+d$ sont premiers entre eux.◃

On a d'autre part la caractérisation :

**D7 :** $z = x \oplus y \Leftrightarrow d(x,z) = d(z,y)$ **.**

▹ En effet $kd(x, x \oplus y) = d(x,y) = kd(x \oplus y, y)$ (où $k$ est le coefficient par lequel on simplifie numérateur et dénominateur dans $x \oplus y$ ) et si $d(x,z) = d(z,y)$ alors $0 = d(x,z) + d(y,z) = kd(x \oplus y, z)$ et $z = x \oplus y$ .◃

Conjuguée avec le théorème de Bézout, on peut en déduire :

**D8 :** $\forall z \in \mathbb{Q}_+^* \ \exists!(x,y) \in \overline{\mathbb{Q}_+} \quad z = x \oplus y$**avec** $d(x,y) = -1$ **.**

▹ Faisons l'analyse du problème.

Posons $z = \dfrac{p}{q}, p > 0, q > 0, p$ et $q$ premiers entre eux , $x = \dfrac{a}{b}, y = \dfrac{c}{d}$ , vérifiant : $z = x \oplus y$ avec $d(x,y) = -1$ .

D'après D6, $d(x,z) = -1$ soit $pb - qa = 1$ . Or on sait que l'équation $pv - qu = 1, (u,v) \in \mathbb{Z}$ , possède une solution unique si l'on impose à $u$ de décrire un intervalle de $\mathbb{Z}$ de longueur $p$. Or ici $0 \leq a = p - c < p$ : $x$ est donc déterminé de façon unique et donc $y$ également.

Faisons la synthèse : soit $(a,b)$ l'unique couple d'entiers vérifiant $pb - qa = 1$ , avec $0 \leqslant a \leqslant p$.

$b = \dfrac{1+qa}{p}$ est > 0, $a$ et $b$ sont premiers entre eux, et posons $c = p - a > 0, d = q - b$. Alors $bc - ad = 1$, donc $c$ et $d$ sont premiers entre eux et si $x = \dfrac{a}{b}, y = \dfrac{c}{d}, z = x \oplus y$. ◃

## 3) Suites de Brocot.

Leur inventeur, horloger, les a conçues en 1862 pour résoudre des problèmes de roues dentées (voir [Brocot]).

Il s'agit en fait d'une suite infinie de suites finies :

$$B_0 = \left(\tfrac{0}{1} = 0, \qquad \tfrac{1}{0} = \infty\right)$$
$$B_1 = \left(0, \qquad \tfrac{1}{1} = 1, \qquad \infty\right)$$
$$B_2 = \left(0, \quad \tfrac{1}{2}, \quad 1, \quad 2, \quad \infty\right)$$
$$B_3 = \left(0, \quad \tfrac{1}{3}, \quad \tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{2}{3} \quad 1, \quad \tfrac{3}{2} \quad 2, \quad 3, \quad \infty\right)$$
$$B_4 = \left(0, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, 1, \tfrac{4}{3}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{3}, 2, \tfrac{5}{2}, 3, 4, \infty\right)$$

et ainsi de suite, la suite $B_n$ s'obtenant en intercalant au milieu de chaque couple de termes consécutifs de la suite $B_{n-1}$, leur somme des cancres.

Nous poserons $B_n = (b_n^k)_{0 \leqslant k \leqslant 2^n}$ .

PROPRIÉTÉS

**B1** $\begin{cases} b_n^0 = 0; b_n^{2^n} = \infty; b_n^{2^{n-1}} = 1; \\ b_n^{2^n - k} = \frac{1}{b_n^k} \textbf{(corollaire de C1)} ; \ b_n^{2^{n-1}-k} = 1 - b_n^k \textbf{(corollaire de C3)} \end{cases}$ .

**B2 : Deux termes consécutifs d'une suite de Brocot ont toujours un déterminant égal à moins un, et leur somme des cancres s'effectue sans simplification.**

▹ En effet, ceci est vrai pour $B_0$ car $d(0,1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$ et cette propriété se conserve par la suite grâce à la conséquence de D6. ◃

On en déduit :

**B'2 : la différence de termes consécutifs d'une suite de Brocot est toujours un rationnel de numérateur 1 et de dénominateur le produit des deux dénominateurs.**

**B3 : Tout terme non extrême d'une suite de Brocot est la somme des cancres de ses deux voisins.**

▹ Ceci est une conséquence de B2 et de D7 ◃ .

Il faut bien voir que cette propriété est évidente pour les termes qui sont ainsi construits, mais pas pour les autres ! D'autre part cette somme des cancres peut s'effectuer avec simplification. Par exemple, dans $B_3$ , $\frac{1}{3} \oplus \frac{2}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ .

**B5 (théorème principal).**

**Tout rationnel ⩾ 0 apparaît tôt ou tard dans une suite de Brocot.**

On en déduit tout de suite, grâce à D8 que

B**'5 : pour tout couple** $(x,y) \in \overline{\mathbb{Q}_+}$ **vérifiant** $d(x,y) = -1$ **, il existe une unique suite de Brocot ayant** $x$ **et** $y$ **comme termes consécutifs.**

Preuve de B5.

◃ Soient $x_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ et $y_n = \dfrac{c_n}{d_n}$ ( $x_n \leqslant y_n$ ) les deux rationnels encadrant un rationnel ⩾ 0 $\dfrac{p}{q}$

dans la $n$-ième suite de Brocot.

Le lemme suivant que nous réutiliserons deux fois pour les suites de Farey, va nous permettre de conclure.

**LEMME 1 : si six entiers naturels $a, b, c, d, p, q$ vérifient**

$\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}$ **avec** $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = -1$ **alors** $p \geq a + c$ **et** $q \geq b + d$**.**

◃ Cherchons en effet à exprimer $p$ en fonction de $a$ et $c$, $q$ en fonction de $b$ et $d$, en résolvant le système : $\begin{cases} p = xa + yc \\ q = xb + yd \end{cases}$ ; comme $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = -1$ les solutions sont : $x = \begin{vmatrix} c & p \\ d & q \end{vmatrix}$ et $y = \begin{vmatrix} p & a \\ q & b \end{vmatrix}$ qui sont des entiers $> 0$ donc $\geqslant 1$. Le résultat en découle (il sert aussi à montrer que les réduites d'une fraction continue sont les meilleures approximations rationnelles du réel limite).◃

Supposons maintenant que $\frac{p}{q}$ n'appartienne à aucune suite de Brocot. Alors $x_n < \frac{p}{q} < y_n$ pour tout $n$ et par conséquent $a_n + c_n \leqslant p$ pour tout $n$. Or la suite $(a_n + c_n)$ est une suite strictement croissante d'entiers ( $a_{n+1} + c_{n+1} = a_n + c_n + (a_n$ ou $c_n)$ ) : contradiction.◃

## 4) Une application : le théorème de Hurwitz.

Le théorème de Hurwitz donne un résultat concernant les approximations rationnelles $\frac{p}{q}$ d'un irrationnel $x$ vérifiant une inégalité du type $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\lambda q^2}$ . On constate en effet que pour tout irrationnel $x$, il existe une constante charnière $\lambda_0 \in [0, +\infty]$ , telle que pour $\lambda < \lambda_0$ , il existe une infinité de rationnels $\frac{p}{q}$ vérifiant $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\lambda q^2}$ , et pour $\lambda > \lambda_0$ , il n'en existe qu'un nombre fini. Le théorème de Hurwitz énonce que $\lambda_0 \geqslant \sqrt{5}$ , autrement dit :

**Théorème de Hurwitz :**

**Étant donné un irrationnel $x$, il existe une infinité de nombres rationnels $\frac{p}{q}$ tels que :**

$\left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{5}\, q^2}$

La démonstration va utiliser les suites de Brocot à partir du

**LEMME 2 :**

**Si un réel x est compris entre deux rationnels $> 0$ $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ tels que $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = -1$ , l'un des trois rationnels $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ et $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d}$ , noté $\frac{p}{q}$, vérifie $\left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{5}\, q^2}$ .**

▹À tout rationnel $\frac{p}{q}$ et tout réel $\lambda > 0$, associons l'intervalle $I_\lambda\left(\frac{p}{q}\right) = \left\{x \in \mathbb{R} / \left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{\lambda q^2}\right\}$ . Les deux intervalles $I_\lambda\left(\frac{a}{b}\right)$ et $I_\lambda\left(\frac{c}{d}\right)$ recouvrent $\left[\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right]$ si et seulement si $\frac{c}{d} - \frac{1}{\lambda d^2} \leqslant \frac{a}{b} + \frac{1}{\lambda b^2}$ , soit, en tenant compte de $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = -1$ , $\lambda \leq$; de la même façon,

$I_\lambda\left(\frac{a}{b}\right)$ et $I_\lambda\left(\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d}\right)$ recouvrent $\left[\frac{a}{b}, \frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d}\right]$ si et seulement si $\lambda \leqslant \frac{b}{b+d} + \frac{b+d}{b}$ .

La condition : $\lambda \leq \frac{b}{d} + \frac{d}{b}$ ou $\lambda \leq \frac{b}{b+d} + \frac{b+d}{b}$ , peut s'écrire : $\lambda \leq \max\left(f\left(\frac{d}{b}\right), f\left(1 + \frac{d}{b}\right)\right)$ , où $f$ est définie par $f(x) = x + \frac{1}{x}$ . Or le lecteur montrera rapidement, en s'aidant d'un graphique, que la fonction définie sur $]0, +\infty[$ : $x \mapsto \max(f(x), f(1+x))$ est minimale quand $f(x) = f(1+x)$ , soit $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ , inverse du nombre d'or, et que ce minimum vaut justement $\sqrt{5}$ .

Par conséquent, si $\lambda \leqslant \sqrt{5}$ , les trois intervalles $I_\lambda\left(\frac{a}{b}\right)$ , $I_\lambda\left(\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d}\right)$ et $I_\lambda\left(\frac{c}{d}\right)$ recouvrent $\left[\frac{a}{b}, \frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d}\right]$ , et l'on montre de façon similaire qu'ils recouvrent aussi $\left[\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d}, \frac{c}{d}\right]$ .

Tout réel compris entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ appartient donc à l'un des trois intervalles $I_{\sqrt{5}}\left(\frac{a}{b}\right)$ , $I_{\sqrt{5}}\left(\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d}\right)$ et $I_{\sqrt{5}}\left(\frac{c}{d}\right)$ , ce que nous voulions montrer.$\triangleleft$

Démontrons maintenant le théorème :

$\triangleleft$ Quitte à changer $x$ en $-x$, on peut supposer $x > 0$. Désignons par $x_n$et $y_n$ les deux rationnels encadrant $x$dans la suite de Brocot $B_n$, qui appartiennent à $]0,+\infty[$ pour $n \in \mathbb{N}$. D'après le lemme, l'un des quatre rationnels (qui ne sont en fait que trois !), noté $\frac{p}{q}$, vérifie $\left|x - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{5}\,q^2}$ . Le nombre $x$ étant irrationnel, les suites monotones $(x_n)$ et $(y_n)$ ne sont constantes à partir d'aucun rang ; il existe donc une infinité de rationnels vérifiant$\left|x - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{5}\,q^2}$ . Le nombre $\sqrt{5}$ étant irrationnel, il ne peut y avoir égalité dans cette inégalité pour plus d'un rationnel $\frac{p}{q}$ . Il existe donc une infinité de rationnels $\frac{p}{q}$ vérifiant $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\,q^2}$ . $\triangleleft$

On peut montrer que cette borne $\sqrt{5}$ est atteinte : le nombre charnière $\lambda_0$ du nombre d'or est exactement $\sqrt{5}$ (cf [Guinot] p. 126). A l'opposé, les nombres de Liouville se laissent mieux approcher par les rationnels : leur $\lambda_0$ est égal à $+\infty$ (cf [Descombes] et [Leveque]).

## 5) Théorème de Lucas : lien entre suites de Brocot et fractions continues.

Poursuivons l'étude des suites de Brocot. On sait que tout rationnel apparaît tôt ou tard dans une suite Brocot, mais on peut se demander plus précisément dans quelle suite de Brocot un rationnel $x$ apparaît pour la première fois.

La décomposition de $x$ en fraction continue simple :

$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_m}}}} = [a_0, a_1, .., a_m]$ $(a_m \geqslant 2)$ va nous donner la réponse.

Au départ $x_0 = 0, y_0 = \infty$ , puis comme $k \oplus \infty = k+1$ , $x_k = k$ et $y_k = \infty$ , jusqu'à $x_{a_0} = a_0$ (partie entière de $x$ ) et $y_{a_0} = \infty$ .

Ensuite, pour $0 \leqslant k \leqslant a_1$ , $x_{a_0+k} = a_0, y_k = a_0 + \frac{1}{k} = [a_0, k]$ .

En effet $a_0 \oplus [a_0, k] = a_0 \oplus \left(a_0 + \frac{1}{k}\right) = a_0 + \left(0 \oplus \frac{1}{k}\right) = a_0 + \frac{1}{k+1} = [a_0, k+1]$ .

On aboutit alors à $x_{a_0+a_1} = a_0, y_{a_0+a_1} = [a_0, a_1]$ .

Ensuite $x_{a_0+a_1+k} = [a_0, a_1, k], y_{a_0+a_1+k} = [a_0, a_1]$ . Le processus se poursuit avec $x_{a_0+a_1+a_2} = [a_0, a_1, a_2], y_{a_0+a_1+a_2+a_3} = [a_0, a_1, a_2, a_3]$, jusqu'à ce qu'on arrive à $x_{a_0+a_1+\ldots+a_m} = y_{a_0+a_1+\ldots+a_m} = [a_0, a_1, \ldots, a_m] = x$ .

La propriété utilisée est $[a_0, a_1, \ldots, a_q] \oplus [a_0, a_1, \ldots, a_q, k] = [a_0, a_1, \ldots, a_q, k+1]$ , qui se déduit de C4.

On peut donc énoncer :

**L1 (Théorème de Lucas) : Le rationnel** $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_m}}}}$**=**$[a_0, a_1, .., a_m]$ **apparaît pour la première fois dans la suite de Brocot d'indice** $n = a_0 + a_1 + .. + a_m$ **.**

Ou de façon équivalente :

**L$'$1 : les termes de rang impair de $B_n$ sont les rationnels dont la somme des coefficients du développement en fraction continue simple est égale à $n$.**

Remarque : par un moyen détourné on obtient le dénombrement des listes d'entiers (le premier $\geqslant 0$, les suivants $\geqslant 1$ et le dernier $\geqslant 2$) dont la somme vaut $n$ (réponse : $2^{n-1}$ ).

On en déduit aussi une définition non récursive des suites de Brocot :

**L2 : la suite $B_n$ est la liste croissante des rationnels $\geqslant 0$ dont la somme des coefficients du développement en fraction continue simple est $\leqslant n$, suivie de $\infty$.**

On peut même pousser le raffinement jusqu'à déterminer le rang de $x$ dans la suite $B_{a_0+a_1+..+a_m}$. En effet, le raisonnement que nous venons de faire montre que $x$ est obtenu dans $B_n = (b_n^k)_{0\leqslant k\leqslant 2^n}$ par une suite de $n$ dichotomies : tout d'abord $a_0$ dichotomies où l'on choisit l'intervalle de droite, puis $a_1$ dichotomies où l'on choisit l'intervalle de gauche, puis $a_2$ dichotomies où l'on choisit l'intervalle de droite, etc.

Pour ne pas avoir à discuter suivant la parité de $m$, nous allons "aménager" le développement $[a_0, a_1, .., a_m]$ : lorsque $m$ est impair, on remplace $a_m$ par $a_{m-1}$,1 (en effet $x = x - 1 + \frac{1}{1}$ !!!) ; par exemple : $\frac{8}{5} = [1,1,1,2] = [1,1,1,1,1]$ .

Le rang $r$ de $\dfrac{p}{q}$ dans $B_{a_0+a_1+..+a_m}$ est donc égal à :

$2^n\left(\left(\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{a_0}}\right)+\left(\frac{1}{2^{a_0+a_1+1}}+\ldots+\frac{1}{2^{a_0+a_1+a_2}}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{n-a_m+1}}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)\right)$

$= (2^{n-1}+\ldots+2^{n-a_0}) + (2^{n-a_0-a_1-1}+\ldots+2^{n-a_0-a_1-a_2}) + \ldots + (2^{a_m-1}+\ldots+2+1)$ ,

C'est-à-dire l'entier qui en binaire s'écrit, de gauche à droite, avec une tranche de $a_0$ chiffres 1, une tranche de $a_1$ chiffres 0, une tranche de $a_2$ chiffres 1, etc..., et se termine par une tranche de $a_m$ chiffres 1.

On peut aussi écrire $r = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k 2^{a_k+a_{k+1}+..+a_m} - 1$ . En résumé :

**L3 : le rang de $x = [a_0, a_1, .., a_m]$ ($m$ pair) dans $B_{a_0+...+a_m}$ est égal à $\overbrace{1..1}^{a_0}\overbrace{0..0}^{a_1}\overbrace{1..1}^{a_2}.....\overbrace{1..1}^{a_m} = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k 2^{a_k+a_{k+1}+..+a_m} - 1$ .**

Autrement dit : $b_{\sum_{k=0}^{m} a_k}^{\sum_{k=0}^{m}(-1)^k 2^{a_k+a_{k+1}+..+a_m}-1} = [a_0, a_1, .., a_m]$ .

Inversement, on peut en déduire un **algorithme pour déterminer les termes de rang impair de $B_n$**.

Le voici sur un exemple : quel est le 27ième terme $x$ de $B_{100}$ ?

Décomposons 27 en base 2 : 27 = 11011 ; le développement en fraction continue de $x$ se termine donc par 2,1,2, et comme la somme des coefficients vaut 100 :

$x = [0, 95, 2, 1, 2] = 8/763$.

# 6) Bijection explicite entre les entiers et les rationnels.

Puisque tout rationnel apparaît dans une suite de Brocot, et que les termes "apparus" dans une suite de Brocot sont tous distincts, si l'on met bout à bout :

0,1, les termes de rang impair de $B_2$ , les termes de rang impair de $B_3$ , etc.,

on obtient une suite de rationnels $0, 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 3, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{2}, 4, \ldots.$ qui définit une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q}_+$ , que nous désignerons par $L$ (initiale de Lucas).

D'après le paragraphe précédent, cela revient à classer les rationnels $\geqslant 0$ suivant la somme des coefficients de leur développement en fraction continue simple, au lieu de la somme numérateur + dénominateur comme on le fait habituellement.

Contrairement à la bijection normale, il y a ici un algorithme simple pour déterminer l'image réciproque d'un rationnel $x \geqslant 0$ par $L$, compte tenu des résultats du paragraphe 5).

1) Décomposer $x$ en fraction continue "aménagée"
$[a_0, a_1, .., a_m]$ ($m$ pair).

2) Écrire le rang $r = \overbrace{1..1}^{a_0}\overbrace{0..0}^{a_1}\overbrace{1..1}^{a_2}.....\overbrace{1..1}^{a_m} = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k 2^{a_k+a_{k+1}+..+a_m} - 1$ de $x$ dans $B_{a_0+...+a_m}$ ;

$L^{-1}(x)$ est égal à $\frac{r+1}{2} + 2^{a_0+a_1+..+a_m-1} - 1 = 1\ \overbrace{1..1}^{a_0}\ \overbrace{0..0}^{a_1}\ \overbrace{1..1}^{a_2}.....\overbrace{1..1}^{a_m-1}$ (il suffit de faire passer un "1" de l'extrémité droite à l'extrémité gauche).

En résumé :

**BI 1 : L'application** $L$ : $\begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+ \\ n = \overbrace{1..1}^{b_0}\overbrace{0..0}^{b_1}\overbrace{1..1}^{b_2}.....\overbrace{1..1}^{b_m} \to [b_0 - 1, b_1, .., b_{m-1}, b_m + 1] \end{cases}$

(si $n$ est pair $b_m = 0, L(0) = 0, L\left(\overbrace{1\ldots1}^{p}\right) = p$ )

est bijective de réciproque : $\begin{cases} \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{N} \\ [a_0, a_1, .., a_m](m \text{ pair}) \to 1\ \overbrace{1..1}^{a_0}\ \overbrace{0..0}^{a_1}\ \overbrace{1..1}^{a_2}.....\overbrace{1..1}^{a_m - 1} \end{cases}$

et la suite$(L(n))$ $_{n\in\mathbb{N}*}$ est la concaténation de $B'_1$ , $B'_2$ ....., où $B'_n$ est formée des termes de rang impair de $B_n$ .

Par exemple :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ en binaire | 0 | 1 | 10 | 11 | 100 | 101 | 110 | 10100 |
| rang de $L(n)$dans $B_{a_0+...+a_m}$ | 0 | 1 | 1 | 11 | 1 | 11 | 101 | 1001 |
| $L(n)$en FC | [0] | [1] | [0,1,1] =[0,2] | [2] | [0,2,1] =[0,3] | [0,1,2] | [1,1,1] =[1,2] | [1,2,1] =[1 |
| $L(n)$ | 0 | 1 | 1/2 | 2 | 1/3 | 2/3 | 3/2 | 4/7 |

D'autre part, le raisonnement fait pour prouver L1 peut s'étendre à des irrationnels. Soit en effet un irrationnel $x \geqslant 0$ de développement en fraction continue simple $[a_0, a_1, .., a_n, \ldots]$ et soient $x_n$ et $y_n$ ( $x_n < y_n$ ) les deux rationnels encadrant $x$dans la $n$-ième suite de Brocot. On a toujours : $x_{a_0} = a_0, y_{a_0+a_1} = [a_0 + a_1]$ ... $x_{a_0+...+a_0} = [a_0, \ldots, a_n]$ si $n$ est pair et $y_{a_0+...+a_0} = [a_0, \ldots, a_n]$ si $n$ est impair.

Prenons par exemple le nombre d'or : $\varphi = [1, 1, 1, \ldots]$ . Dans ce cas $x_n = x_{n+1} = [1, 1\ldots, 1_{ntermes}] = \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ si $n$ est impair et $y_n = y_{n+1} = [1, 1\ldots, 1_{ntermes}] = \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ si $n$ est pair, où $(F_n)$ est la suite de Fibonacci, qui se retrouve donc dans les suites de Brocot (les $x_k$ et $y_k$ ont été mis en gras dans les exemples de suites de Brocot ci-dessus).

# 7) Suite des numérateurs des fractions de Brocot.

A considérer par exemple

$B_3 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{1}{0}\right)$

$B_4 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{0}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{1}{0}\right)$

il semblerait que les suites des numérateurs et des dénominateurs des éléments de $B_n$ soient identiques dans un ordre inverse (cela provient de $b_n^{2^n-k} = \frac{1}{b_n^k}$) et surtout que les numérateurs de la première moitié de $B_{n+1}$ soient aussi ceux de $B_{n-1}$ .

Supposons que tel soit le cas : $B_n = \left(\dfrac{u_k}{u_{2^n-k}}\right)_{0\leqslant k\leqslant 2^n}$ ; la définition de $B_{n+1}$ à partir de $B_n$ nous donnerait alors les relations : $u_{2k} = u_k$ et $u_{2k+1} = u_k + u_{k+1}$ .

Définissons donc une suite $(u_n)$ par ces relations :

**DÉFINITION : on appelle suite des numérateurs de Brocot la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **définie récursivement par :**

$$u_1 = 1 \textbf{ et } \begin{cases} u_n = u_{\frac{n}{2}} \text{ si } n \text{ est pair} \\ u_n = u_{\frac{n-1}{2}} + u_{\frac{n+1}{2}} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases} .$$

Il est maintenant facile de démontrer par récurrence que

**U1 :** $B_n = \left(\frac{u_k}{u_{2^n-k}}\right)_{0\leqslant k\leqslant 2^n}$ .

Voici un petit programme Maple de calcul des suites de Brocot appliquant ce résultat :

>u:=proc(n) option remember;

if n=0 then 0 elif n=1 then 1 elif is(n/2,integer) then u(n/2) else u((n-1)/2)+u((n+1)/2) fi end;

> seq(u(n),n=0..32);

0, 1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1, 5, 4, 7, 3, 8, 5,7, 2, 7, 5, 8, 3, 7, 4, 5, 1

> seq(u(n),n=32..64);

1, 6, 5, 9, 4, 11, 7, 10, 3, 11, 8, 13, 5, 12, 7, 9, 2, 9, 7, 12, 5,13, 8, 11, 3, 10, 7, 11, 4, 9, 5, 6, 1

> B:=(n,k) -> u(k)/u(2^n-k) : seq(B(5,k),k=0..31);

0, 1/5, 1/4, 2/7, 1/3, 3/8, 2/5, 3/7, 1/2, 4/7, 3/5, 5/8, 2/3, 5/7, 3/4, 4/5,
1, 5/4, 4/3, 7/5, 3/2, 8/5, 5/3, 7/4, 2, 7/3, 5/2, 8/3, 3 , 7/2, 4 , 5.

Voici quelques propriétés faciles de la suite $(u_n)$ :

**U2 :**

**Si $n$ est impair,** $u_n = u_{n-1} + u_{n+1}$ **,**

$u_{2^n+k} = u_{2^{n+1}-k}$ **pour** $0 \leq k \leq 2^n$

$u_{2^k n} = u_n,\ u_{2^k n-1} = u_{n-1} + k u_n,\ u_{2^k n+1} = u_{n+1} + k u_n$

Mais la propriété la plus remarquable de la suite $(u_n)$ est la suivante :

**U3 : Les couples de termes consécutifs de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ sont tous distincts et décrivent exactement l'ensemble des couples de naturels non nuls premiers entre eux.**

Nous utiliserons pour la démonstration le lemme suivant qui est une simple récriture des trois dernières propriétés de U2.

**LEMME 3 : si 4 naturels $a,b,q,r$ vérifient $a = bq + r$ et que $b$ et $r$ sont deux termes consécutifs de la suite $(u_n)$, alors $a$ et $b$ sont aussi deux termes consécutifs de $(u_n)$. Plus précisément, si $b = u_x$ et $r = u_{x+1}$ , alors $a = u_{2^q x+1}$ et $r = u_{2^q x}$ et si $b = u_x$ et $r = u_{x-1}$ , alors $a = u_{2^q x-1}$ et $r = u_{2^q x}$ (noter l'inversion de l'ordre).**

Preuve de U3 :

▹ Soit $(p,q)$ un couple de naturels ⩾1 premiers entre eux. Effectuons l'algorithme d'Euclide : $p = a_0 q + r_0, \quad q = a_1 r_0 + r_1, \quad r_0 = a_2 r_1 + r_2, \ldots, r_{i-2} = a_i r_{i-1} + r_i, \ldots$ , avec $r_m = 1$ et $r_i = 0$ pour $i > m$ .

On a donc $\frac{p}{q} = [a_0, a_1, \ldots, a_m]$ , et comme précédemment, on se ramène au cas où $m$ est pair.

Puisque $(r_m, r_{m+1}) = (1,0) = (u_1, u_0)$ , en utilisant $m+1$ fois le lemme, on aboutit à :

$p = u_n$ et $q = u_{n+1}$ avec $n = 2^{a_0}(2^{a_1}(\ldots(2^{a_{m-1}}(2^{a_m} - 1) + 1)\ldots -1) + 1) - 1$ ,

soit $n = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k 2^{a_0+a_1+\ldots+a_k} - 1 = \overbrace{1\ldots1}^{a_m}\ \overbrace{0\ldots0}^{a_{m-1}}\ \ldots\ldots \overbrace{0\ldots0}^{a_1}\overbrace{1\ldots1}^{a_0}$ .

Nous avons donc montré que tout couple de naturels premiers entre eux est un couple de termes consécutifs de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ . La réciproque se montre facilement par récurrence et le fait que les couples sont tous distincts provient de l'unicité des décompositions en base 2 et en fractions continues.◃

Une conséquence directe de ce résultat et de sa démonstration est que

**U4 : l'application $M$ :** $\begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+ \\ n \mapsto \frac{u_n}{u_{n+1}} \end{cases}$ **est bijective, de réciproque :**

$$\begin{cases} \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{N} \\ [a_0, a_1, \ldots, a_m](m \text{ pair}) \to \overbrace{1\ldots1}^{a_m}\ \overbrace{0\ldots0}^{a_{m-1}}\ \ldots\ldots \overbrace{0\ldots0}^{a_1}\overbrace{1\ldots1}^{a_0} \end{cases}$$

On remarquera la parenté proche entre les applications $L$ et $M$ (inversion de l'ordre des $a_i$).

On en déduit, en utilisant L'1 :

**U5 : l'ensemble des $M(k)$ pour $2^{n-1} \leq k \leq 2^n - 1$ est l'ensemble des termes de rang impair de $B_n$ (mais l'ordre n'est pas le même).**

Voici quelques exemples :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 20 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ en binaire | 0 | 1 | 10 | 11 | 100 | 101 | 10100 | 1100100 |
| $M(n)$en FC | [0] | [1] | [0,1,1]= [0,2] | [2] | [0,2,1] =[0,3] | [1,1,1] =[1,2] | [0,2,1,1,1] =[0,2,1,2] | [0,2,1,2,2] |
| $M(n)$ | 0 | 1 | 1/2 | 2 | 1/3 | 3/2 | 3/8 | 7/19 |

## 8) Escalier diabolique de Brocot.

Remarquons que lorsqu'un rationnel apparaît dans une suite de Brocot avec un rang $r,$ son rang dans les suites suivantes est à chaque fois multiplié par 2, de sorte que son "rang proportionnel" (i.e. son rang rapporté au nombre d'éléments de la suite) reste inchangé.

On peut donc définir une application, que nous désignerons par *BRO*, de $\mathbb{Q}_+$ dans $\mathbb{B}\cap[0,1[$ , ensemble des nombres binaires de $[0,1[$ , qui à tout élément de $\mathbb{Q}_+$ fait correspondre son "rang proportionnel" dans les suites de Brocot où il apparaît.

D'après les résultats de 5), cette application n'est autre que l'application qui au rationnel de développement en fraction continue "aménagé" : $[a_0,a_1,..,a_m]$ ($m$ pair) fait correspondre

$$\frac{\sum_{k=0}^{m}(-1)^k 2^{a_k+a_{k+1}+..+a_m}-1}{2^{a_0+a_1+..+a_m}} = 1+\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^{k+1}}{2^{a_0+a_1+..+a_k}} = 0,\overbrace{1..1}^{a_0}\overbrace{0..0}^{a_1}\overbrace{1..1}^{a_2}.....\overbrace{1..1}^{a_m} \text{ (= aussi } \frac{2L^{-1}(x)+1}{2^{a_0+a_1+..+a_m}}-1\text{ )}$$

En résumé :

E 1 : l'application *BRO* qui à tout élément de $\mathbb{Q}_+$ fait correspondre son "rang proportionnel" dans les suites de Brocot où il apparaît, peut être définie par :

$$\begin{cases} \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{B}\cap[0,1[ \\ [a_0,a_1,..,a_m](m\text{ pair}) \mapsto 0,\overbrace{1..1}^{a_0}\overbrace{0..0}^{a_1}\overbrace{1..1}^{a_2}.....\overbrace{1..1}^{a_m} \end{cases}.$$

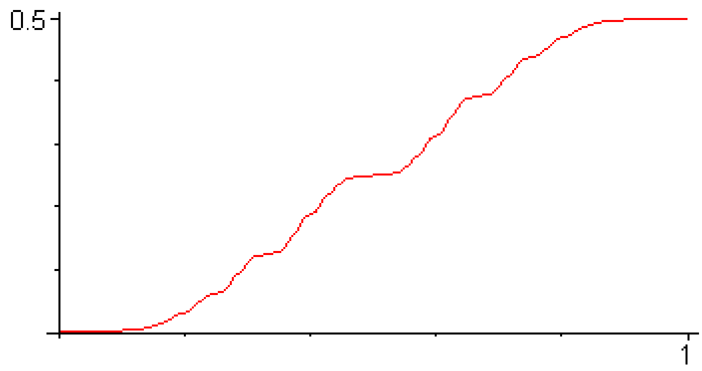
Par exemple

| $x$ | $x$ en frac. cont. am. | $BRO(x)$ en binaire | $BRO(x)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | [0] | 0 | 0 |
| 1/4 | [0,3,1] | 0,0001 | 1/16 |
| 1/3 | [0,2,1] | 0,001 | 1/8 |
| 2/5 | [0,2,2] | 0,0011 | 3/16 |
| 1/2 | [0,1,1] | 0,01 | 1/4 |
| 3/5 | [0,1,1,1,1] | 0,0101 | 5/16 |
| 2/3 | [0,1,2] | 0,011 | 3/8 |
| 3/4 | [0,1,3] | 0,0111 | 7/16 |
| 1 | [1] | 0,1 | 1/2 |
| 4/3 | [1,2,1] | 0,1001 | 9/16 |
| 3/2 | [1,1,1] | 0,101 | 5/8 |
| 5/3 | [1,1,2] | 0,1011 | 11/16 |
| 2 | [2] | 0,11 | 3/4 |
| 5/2 | [2,1,1] | 0,1101 | 13/16 |
| 3 | [3] | 0,111 | 7/8 |
| 4 | [4] | 0,1111 | 15/16 |

Voici un programme Maple de tracé de la courbe de *BRO* entre 0 et 1 (on a joint entre eux

129 points de la courbe)

```
>M := (n, k) -> [B(n, k), k/2^n] :
> plot([seq(M(8,k),k=0..2^7)],scaling=constrained);
```




Le lecteur vérifiera facilement que cette application est strictement croissante (en utilisant la première définition) et bijective (en utilisant la deuxième définition).

On peut la prolonger de façon naturelle en une application $\overline{BRO}$ de $\mathbb{R}_+$ dans [0,1[ en posant

$\overline{BRO}([a_0, a_1, .., a_m, \ldots]) = 0, \overbrace{1..1}^{a_0}\overbrace{0..0}^{a_1}\overbrace{1..1}^{a_2}.....\overbrace{1..1}^{a_m}\ldots$ . On vérifie de nouveau que ce prolongement est strictement croissant et bijectif. $\overline{BRO}$ étant monotone d'image un intervalle, elle est donc continue, ainsi que sa réciproque.

Quelques valeurs remarquables : soit $\varphi$ le nombre d'or, $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1, 1, 1, \ldots.]$ ;

$\overline{BRO}(\varphi) = 0, 1010\ldots = \frac{2}{3}$ ;

$\overline{BRO}\left(\sqrt{2}\right) = \overline{BRO}([1, 2, 2, 2, ..]) = 0, 100110011\ldots = \frac{3}{5}$ .

D'une manière générale, $\overline{BRO}(x)$ est un rationnel non binaire si et seulement si $x$ possède un développement en fraction continue infini périodique, autrement dit, d'après un résultat classique, si et seulement si$x$ est quadratique (i. e. solution d'une équation du second degré à coefficients entiers).

Mais ceci n'est pas la seule bizarrerie de cette fonction, il en est une autre qui est à l'origine du nom : “escalier diabolique de Brocot” que nous avons donné à sa courbe.

En effet, l'escalier diabolique habituel est celui de Cantor, courbe d'une fonction de dérivée nulle sur le complémentaire de l'ensemble de Cantor (lequel est négligeable) et qui pourtant croit (non strictement) de 0 à 1.

La fonction $\overline{BRO}$ est encore plus diabolique car strictement croissante et elle aussi de dérivée nulle presque partout (résultat de Pierre Liardet, cf. [Öttl]).

Nous allons nous contenter de montrer que

**E2 : $\overline{BRO}$ est de dérivée nulle sur $\mathbb{Q}_+$ .**

Voici les grandes lignes d'une démonstration ; tout d'abord un lemme permettant de se ramener à des suites.

**LEMME 4 : pour qu'une fonction $f$ monotone au voisinage de $x_0$ soit dérivable à droite en $x_0$, il suffit qu'il existe une suite $(u_n)$ strictement décroissante de limite $x_0$ vérifiant $u_{n+1} - x_0 \sim u_n - x_0$ telle que $\frac{f(u_n) - f(x_0)}{u_n - x_0}$ soit convergente (et sa limite vaut alors $f'_d(x_0)$ ).**

Montrons la dérivabilité de $\overline{BRO}$ en $x_0 = [a_0, a_1, .., a_m]$ ($m$ pair) en utilisant la suite

$$(u_n) = ([a_0, a_1, .., a_m, n]) = \left( a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{...+\cfrac{1}{a_m + \frac{1}{n}}}}} \right)$$ , qui converge vers $x_0$ en décroissant strictement. En effet

$\overline{BRO}(u_n) - \overline{BRO}(x_0) = \overline{BRO}([a_0, a_1, .., a_m, n-1, 1]) - \overline{BRO}([a_0, a_1, .., a_m]) = 0, \overbrace{0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0}^{a_0+a_1+...+a_m+n-1} 1 = \frac{\alpha}{2^n}$ , tandis que $u_n - x_0 = \frac{\beta}{n+\gamma}$ . L'on vérifie que $u_{n+1} - x_0 \sim u_n - x_0$ et surtout que $\frac{\overline{BRO}(u_n) - \overline{BRO}(x_0)}{u_n - x_0}$ tend vers 0. Nous avons montré $\overline{BRO}'_d = 0$ . A gauche, il suffit d'utiliser $(v_n) = ([a_0, a_1, .., a_m, 1, n])$ .

# 9) Des suites de Brocot incomplètes : les suites de Farey.

Du théorème de Lucas (cf. 5)), on peut déduire le

**Corollaire F0 : dans la suite $B_n$ apparaissent tous les rationnels $\geqslant 1$ dont le numérateur est $\leqslant n$ et tous les rationnels compris entre 0 et 1 dont le dénominateur est $\leqslant n$.**

Ceci provient de L1 et du

**LEMME 5 : posons $\frac{p}{q} = [a_0, a_1, .., a_n]$ où toutes les variables qui interviennent sont des entiers $\geqslant 1$ sauf $a_0$ , $n$ et $p$ qui peuvent être éventuellement nuls, $p$ et $q$ premiers entre eux ; alors**

$$\begin{cases} \text{si } a_0 \geq 1, \ p \geq a_0 + \ldots + a_n \\ \text{si } n \geq 1, \ q \geq a_1 + \ldots + a_n \end{cases} .$$

▹ En effet, $[a_0] = \frac{a_0}{1}$ et $a_0 \geqslant a_0$ , ce qui montre l'énoncé pour $n = 0$.

$[a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$ et $a_0 a_1 + 1 \geq a_0 + a_1 \Leftrightarrow (a_0 - 1)(a_1 - 1) \geqslant 0$ , ce qui montre l'énoncé pour $n = 1$.

Supposons-le exact à l'ordre $n-1$ et montrons-le à l'ordre $n$.

Écrivons

$\frac{p}{q} = [a_0, a_1, .., a_n]$ et $\frac{p'}{q'} = [a_1, .., a_n]$ (fractions irréductibles) ; alors

$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{\frac{p'}{q'}} = \frac{a_0 p' + q'}{p'}$ . Par hypothèse de récurrence $p' \geqslant a_1 + \ldots + a_n$ , et si $n \geq 2$ $q' \geq a_2 + \ldots + a_n$ . Alors si $a_0 \geq 1$ , $p = a_0 p' + q' \geq a_0(a_1 + 1) + a_2 + \ldots + a_n \geq a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ ce qui achève la récurrence et la preuve du lemme.◃

Ceci nous amène à la définition des suites de Farey.

Leur auteur, un géologue anglais, les a découvertes antérieurement à Brocot, en 1816. Ces suites ressemblent à celles de Brocot, d'où parfois une certaine confusion. Mais si la définition naturelle des suites de Brocot est récursive, celle des suite de Farey est directe.

$F_1 = \left(0, \quad 1\right)$

$F_2 = \left(0, \quad \frac{1}{2}, \quad 1\right)$

$F_3 = \left(0, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad 1\right)$

$F_4 = \left(0, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{3}, \quad \# \quad \frac{1}{2}, \quad \# \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4}, \quad 1\right)$

$F_5 = \left(0, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{4}, \# \frac{1}{3}, \quad \# \frac{2}{5}, \quad \# \frac{1}{2}, \quad \# \frac{3}{5}, \quad \# \frac{2}{3}, \quad \# \frac{3}{4}, \quad \frac{4}{5}, \quad 1\right)$

$F_6 = \left(0, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \# \frac{1}{4}, \#\#\# \frac{1}{3}, \#\#\# \frac{2}{5}, \#\#\# \frac{1}{2}, \#\#\# \frac{3}{5}, \#\#\# \frac{2}{3}, \#\#\# \frac{3}{4}, \# \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, 1\right)$

PROPRIÉTÉS

**F1 : le nombre d'éléments de $F_n$ est** $1 + \sum_{i=1}^{n} \varphi(k) = 1 + \Phi(n)$ **où $\varphi$ est l'indicateur d'Euler.**

▹ En effet $\varphi(n)$ , nombre d'entiers premiers avec $n$ compris entre 1 et $n$ est donc aussi le nombre de rationnels compris entre 0 et 1 dont le dénominateur est égal à $n$.◃

On trouvera dans [Hardy&Wright], page 268, l'estimation asymptotique de $\varphi(n)$ suivante : $\varphi(n) = \frac{3n^2}{\pi^2} + O(n \ln n)$ .

**F2 :** *si* $F_n = (f_k)_{0 \leq k \leq \Phi(n)}$, $\quad f_{\Phi(n)-k} = 1 - f_k$ **.**

◃ Ceci provient de ce que si $x$ est un rationnel, $1 - x$ a même dénominateur que $x$ et que $\left(1 \leq x < y \leq \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} \leq 1 - y < 1 - x \leq 1\right)$ .◃

C'est une conséquence de F0. Nous avons indiqué ci-dessus par un # les termes supprimés.

F4 : deux termes consécutifs d'une suite de Farey $F_n$ ont été deux termes consécutifs d'une suite de Brocot $B_p$ avec $p \leqslant n$.

◃ Soient $x < y$ ces deux termes consécutifs de $F_n$ ; et soit $B_p$ ($p \leqslant n$) la première suite de Brocot où ils apparaissent tous les deux ; supposons que dans $B_p x$ et $y$ ne soient pas consécutifs ; alors tous les termes de situés entre $x$ et $y$ ont forcément un dénominateur strictement supérieur à celui de $x$ et à celui de $y$, car sinon ils apparaîtraient dans $F_n$ ce qui est impossible, $x$ et $y$ y étant consécutifs. Or une conséquence de la définition des suites de Brocot et de B2 est que les dénominateurs des termes entre 0 et 1 d'une suite de Brocot sont en dents de scie : le premier est strictement inférieur au deuxième, le deuxième strictement supérieur au troisième etc... La seule possibilité est donc que le seul terme de $B_p$ situé entre $x$ et $y$ soit $x \oplus y$ ; mais alors, $x$ et $y$ apparaîtraient aussi dans $B_{p-1}$, ce qui est absurde.▹

On en déduit, d'après B2 :

**F5 (théorème de Farey):**

**Deux termes consécutifs d'une suite de Farey ont un déterminant égal à moins un et leur somme des cancres s'effectue sans simplification.**

Nous donnerons plus bas une démonstration de ce théorème F5 indépendante des suites de Brocot.

Par conséquent, d'après D4 :

**F6 : Tout terme non extrême d'une suite de Farey est la somme des cancres de ses deux voisins.**

On déduit aussi de F5 une définition récursive des suites de Farey. Nous aurons besoin auparavant des deux propriétés suivantes :

**F7 : si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont consécutifs dans $F_n$ , alors $b + d > n$.**

▹ En effet $\frac{a+c}{b+d}$ ne peut appartenir à $F_n$ puisque $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont consécutifs ; son dénominateur $b + d$ (il n'y a pas simplification !) est donc $> n$. ◃

**F8 : deux termes consécutifs d'une suite de Farey n'ont pas le même dénominateur.**

◃ Ceci peut se démontrer directement, mais nous pouvons le voir comme conséquence de F3 et du fait évident que deux termes consécutifs d'une suite de Brocot n'ont pas le même dénominateur.◃

Voici maintenant une définition récursive des suites de Farey.

**F9 : la suite $F_n$ s'obtient en intercalant au milieu de chaque couple de termes consécutifs de la suite $F_{n-1}$, leur somme des cancres, si celle-ci a un dénominateur $\leqslant n$.**

▹ Soient en effet $\frac{a}{b}$ **et** $\frac{c}{d}$ deux termes consécutifs de $F_{n-1}$. Nous cherchons tous les $\frac{p}{n}$ tels que $\frac{a}{b} < \frac{p}{n} < \frac{c}{d}$. D'après F4 et le lemme 1 du théorème B5, nous savons que $n \geqslant b + d$. Par conséquent, si $b + d > n$, il n'y a aucun terme de $F_n$ entre $\frac{a}{b}$ **et** $\frac{c}{d}$. Si $b + d$ est $\leqslant n$, il ne peut être $< n$ d'après F7, et donc $n = a + b$. Or d'après F8, il y a au plus une valeur de $p$ possible. Comme $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$, $p = a + c$. ◃

On peut maintenant chercher à construire directement le successeur d'un élément donné d'une suite de Farey. Ceci sera donné par

F10 : le successeur d'un élément $\frac{a}{b}<1$ de la suite de Farey $F_n$ est le rationnel $\frac{c}{d}$ où $(c,d)$ est l'unique solution de l'équation : $bx-ay=1, (x,y)\in\mathbb{Z}^2$ vérifiant $n-b<y\leqslant n$.

◃ En effet le successeur $\frac{c}{d}$ de $\frac{a}{b}$ vérifie $bc-ad=1$ d'après F5, et $n-b<d\leqslant n$ d'après F7. Il est maintenant bien connu que l'équation diophantienne $bx-ay=1,\ (x,y)\in\mathbb{Z}^2$ , $a$ et $b$ étant premiers entre eux, possède une solution unique sous la condition que $y$ parcoure un intervalle d'amplitude b.◃

Nous invitons le lecteur à trouver lui-même le prédécesseur de $\frac{a}{b}$ .

En tous cas, ceci va nous permettre de donner une démonstration très courte et directe du théorème de Farey affirmant que deux termes consécutifs d'une suite de Farey ont un déterminant égal à moins un.

▹ Soit en effet l'élément $\frac{a}{b}<1$ de la suite de Farey $F_n$ . Considérons comme dans F10 le rationnel $\frac{c}{d}$ vérifiant $bc-ad=1$ (d'où $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}+\frac{1}{bd}$ ) avec $n-b<d\leqslant n$ ; il est clair que $\frac{c}{d}$ appartient à $F_n$ et s'y trouve après $\frac{a}{b}$ . Supposons qu'il existe $\frac{p}{q}$ appartenant à $F_n$ et vérifiant $\frac{a}{b}<\frac{p}{q}<\frac{c}{d}$ ; d'après le lemme 1 du théorème B5 $q\geqslant b+d>n$ : contradiction. Le successeur de $\frac{a}{b}$ est donc $\frac{c}{d}$ qui vérifie $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=-1$.◃


Bibliographie :

[Arnaudiès&Fraysse] : J.M. Arnaudiès - H. Fraysse, Cours de Mathématiques 2 analyse, page 205, Dunod université, 1988.

[Brocot] : Brocot, Calcul des rouages par approximation, Paris, 1862.

[Conway&Guy] : J. H. Conway - R. K. Guy, The book of numbers, Springer Verlag, 1996.

[Descombes] : R. Descombes, Eléments de théorie des nombres, PUF, 1986.

[Guinot] : M. Guinot, Arithmétique pour amateurs, livre IV, Aléas, 1996.

[Hardy&Wright] : G.H. Hardy - E.M. Wright, An introduction to the theory of numbers, Oxford University Press.

[Leveque] : W. J. Leveque, Topics in number theory, Addison Wesley.

[Lucas] : E. Lucas, Théorie des nombres, pages 168 à 175, réédité par A. Blanchard.

[Öttl] : G. Öttl, Bijection explicite de $\mathbb{Q}_+$ sur $\mathbb{N}$, polycopié de l'université de Provence.

Problème d'agrégation de 1962.