I) FONCTIONS VECTORIELLES.

P plan euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, $\overrightarrow{P}$ ensemble des vecteurs de P , $\overrightarrow{f}$ fonction de $\mathbb{R}$ vers $\overrightarrow{P}$ d'ensemble de définition D.

$\overrightarrow{f}(t) \left| \begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \end{array} \right._{/\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)}$, t_0 point adhérent à D, $\overrightarrow{l} \left| \begin{array}{l} a \\ b \end{array} \right._{/\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)} \in \overrightarrow{P}$.

$$\text{DEF : } \begin{cases} \lim\limits_{t\to t_0} \overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{l} \Leftrightarrow \lim\limits_{t\to t_0} \left\| \overrightarrow{f}(t) - \overrightarrow{l} \right\| = 0. \\ \\ \overrightarrow{f} \text{ est continue en } t_0 \in D \Leftrightarrow \lim\limits_{t\to t_0} \overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{f}(t_0) \\ \overrightarrow{f} \text{ est dérivable en } t_0 \in \overset{\circ}{D} \Leftrightarrow \lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{1}{t-t_0}\left(\overrightarrow{f}(t) - \overrightarrow{f}(t_0)\right) \text{ existe } \left(\overset{def}{=} \overrightarrow{f}'(t_0)\right) \end{cases}$$

Notation : $\overrightarrow{f}'(t) = \dfrac{d}{dt}\left(\overrightarrow{f}(t)\right)$.

PROP :

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to t_0} \overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{l} \Leftrightarrow \lim\limits_{t\to t_0} x(t) = a \text{ et } \lim\limits_{t\to t_0} y(t) = b \\ \\ \overrightarrow{f} \text{ est continue en } t_0 \in D \Leftrightarrow x \text{ et } y \text{ sont continues en } t_0 \\ \overrightarrow{f} \text{ est dérivable en } t_0 \in \overset{\circ}{D} \Leftrightarrow x \text{ et } y \text{ sont dérivables en } t_0 \text{ et } \overrightarrow{f}'(t_0) = x'(t_0)\overrightarrow{i} + y'(t_0)\overrightarrow{j} \end{cases}$$

D1

$$\text{PROPRIÉTÉS : } \begin{cases} \left(\overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}\right)' = \overrightarrow{f}' + \overrightarrow{g}', \ \left(\lambda \overrightarrow{f}\right)' = \lambda \overrightarrow{f}' \\ \left(\overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{g}\right)' = \overrightarrow{f}'.\overrightarrow{g} + \overrightarrow{f}.\overrightarrow{g}' \\ \left(\det\left(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}\right)\right)' = \det\left(\overrightarrow{f}', \overrightarrow{g}\right) + \det\left(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}'\right) \\ \left(\left\|\overrightarrow{f}\right\|^2\right)' = 2\overrightarrow{f}.\overrightarrow{f}', \ \left(\left\|\overrightarrow{f}\right\|\right)' = \dfrac{\overrightarrow{f}}{\left\|\overrightarrow{f}\right\|}.\overrightarrow{f}' \end{cases}$$

D2

II) COURBES PARAMÉTRÉES.

$M : \begin{cases} \mathbb{R} \to P \\ t \to M(t) \left| \begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \end{array} \right. \end{cases}$ d'ensemble de définition $D = D_x \cap D_y$.

$(C) = \{M(t) \ / \ t \in D\}$

$\overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$

DEF : (C) est la *courbe* associée à $t \mapsto M(t)$,et $t \mapsto M(t)$ est une *paramétrisation* de l'ensemble (C).

PROP : en faisant une confusion entre M, x, y variables et M, x, y fonctions :

$$M \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right. \in (C) \Leftrightarrow \exists t \in D \ \ M = M(t)$$

$$\Leftrightarrow \exists t \in D \left| \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right.$$

DEF : $\left| \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right.$ est une *représentation paramétrique* de (C).

REMARQUE : une courbe de fonction, d'équation $y = f(x)$ peut être paramétrée par $M(t)\left|\begin{array}{l} t \\ f(t) \end{array}\right.$ et a donc pour représentation paramétrique : $\left|\begin{array}{l} x = t \\ y = f(t) \end{array}\right.$

AUTRES EXEMPLES : E1

PROP : $\overrightarrow{f}'(t) \left(= \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right) = \dfrac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$ pour tout point O' ; il est donc noté $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt}$.

D3

DEF : $\overrightarrow{f}'(t) = \dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt} = x'(t)\overrightarrow{i} + y'(t)\overrightarrow{j}$ est le vecteur vitesse à l'instant t, noté $\overrightarrow{v}(t)$ ou $\overrightarrow{v}(M)$ (pratique mais dangereux).

DEF : $\left\{\begin{array}{l} \text{un point } M \text{ est } \textit{régulier} \Leftrightarrow \overrightarrow{v}(M) \neq \overrightarrow{0} \\ M \text{ est } \textit{singulier} \text{ (ou } \textit{stationnaire}) \Leftrightarrow \overrightarrow{v}(M) = \overrightarrow{0} \end{array}\right.$

Si M est régulier, le *vecteur tangent* en M est $\overrightarrow{T} = \pm\dfrac{\overrightarrow{v}(M)}{\|\overrightarrow{v}(M)\|}$ (en choisissant + ou - de sorte à éviter des valeurs absolues) ; la droite passant par M et dirigée par $\overrightarrow{T}$ est la *tangente* à (C) en M ; et l'on définit la *vitesse algébrique* $v(t)$ par $\overrightarrow{v}(t) = v(t)\overrightarrow{T}$.

DEF : $\overrightarrow{f}''(t) = \dfrac{d^2\overrightarrow{M}}{dt^2} = x''(t)\overrightarrow{i} + y''(t)\overrightarrow{j}$ est le *vecteur accélération* à l'instant t, noté $\overrightarrow{a}(t)$ ou $\overrightarrow{a}(M)$.

DEF : un point M est *birégulier* $\Leftrightarrow (\overrightarrow{v}(M), \overrightarrow{a}(M))$ est libre.

DEF : le vecteur *normal* $\overrightarrow{N}$ en M régulier est l'image de $\overrightarrow{T}$ dans la rotation d'angle $\pi/2$; le repère $\left(M, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}\right)$ est appelé le *repère de Frénet* en M.

On décompose alors l'accélération dans la base de Frénet $\left(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}\right)$: $\overrightarrow{a} = a_T\overrightarrow{T} + a_N\overrightarrow{N}$; a_T et a_N sont appelés *accélérations tangentielle et normale.*

EXEMPLE : E2

Exercice : montrer que $\left\{\begin{array}{l} \|\overrightarrow{v}\| = cte \Leftrightarrow v.a_T = 0 \text{ (mouvement uniforme)} \\ \|\overrightarrow{v}\| \nearrow \Leftrightarrow v.a_T \geqslant 0 \text{ (mouvement accéléré)} \\ \|\overrightarrow{v}\| \searrow \Leftrightarrow v.a_T \leqslant 0 \text{ (mouvement retardé)} \end{array}\right.$

III ÉTUDE D'UNE COURBE PARAMÉTRÉE.

1) Réduction de l'ensemble d'étude.

a) Changer t en $t + T$.

Si $M(t+T) = F(M(t))$ où F est une isométrie du plan, on n'étudiera la paramétrisation que sur $[a, a+T]$; pour obtenir la courbe entière, on effectuera les transformations $F^k, k \in \mathbb{Z}$ sur la portion de courbe obtenue.

Par exemple, si lorsque $t \to t + T$, $\left\{\begin{array}{l} x \to y \\ y \to x \end{array}\right.$ (soit $x(t+T) = y(t)$ et $y(t+T) = x(t)$), on étudie sur $[a, a+T]$; on effectuera une symétrie par rapport à la première bissectrice pour obtenir la courbe entière.

b) Changer t en $-t$.

Si $M(-t) = F(M(t))$ où F est une isométrie du plan, on n'étudiera la paramétrisation que sur l'ensemble d'étude précédent $\cap\, \mathbb{R}_+$ (ou $\cap\, \mathbb{R}_-$) ; pour obtenir la courbe entière, on effectuera la transformation F sur la portion de courbe correspondant à cet ensemble d'étude.

Exemple : E3 $\left\{\begin{array}{l} x = \cos 2t \\ y = \sin 3t \end{array}\right.$

c) Changer t en $T-t$ (le cas précédent étant en fait un cas particulier).
Si $M(T-t) = F(M(t))$ où F est une isométrie du plan, on n'étudiera la paramétrisation que sur l'ensemble d'étude précédent $\cap\ [\frac{T}{2},+\infty[$ (ou $\cap\ ]-\infty,\frac{T}{2}]$) ; pour obtenir la courbe entière, on effectuera la transformation F sur la portion de courbe correspondant à cet ensemble d'étude.

Exemple : E4 $\begin{cases} x = \cos t + \sin^2 t \\ y = \sin t + \cos^2 t \end{cases}$

d) Changer t en $\frac{1}{t}$.
Si $M(1/t) = F(M(t))$ où F est une isométrie du plan, on n'étudiera la paramétrisation que sur l'ensemble d'étude précédent $\cap\ [-1,1]$ (ou $\cap\ ]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$) ; pour obtenir la courbe entière, on effectuera la transformation F sur la portion de courbe correspondant à cet ensemble d'étude.

Exemple : E5 (puntiforme) : $\begin{cases} x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ y = \dfrac{2t}{1-t^2} \end{cases}$

L'ensemble d'étude final est celui obtenu en d) intersecté avec l'ensemble de définition.

2) Étude des deux fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sur l'ensemble d'étude.

Présentation du tableau de variations :

Exemples : E3, E4, E5

3) Étude locale.

En $M_0 \begin{cases} x_0 = x(t_0) \\ y_0 = y(t_0) \end{cases}$, si $t = t_0 + u$, Taylor-Young donne :

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + x'(t_0)u + \dfrac{x''(t_0)}{2}u^2 + \dfrac{x'''(t_0)}{6}u^3 + \dfrac{x^{(4)}(t_0)}{24}u^4 + o(u^4) \\ y(t) = y_0 + y'(t_0)u + \dfrac{y''(t_0)}{2}u^2 + \dfrac{y'''(t_0)}{6}u^3 + \dfrac{y^{(4)}(t_0)}{24}u^4 + o(u^4) \end{cases}$$

soit, vectoriellement : $\overrightarrow{M_0M}(t) = u\,\overrightarrow{v_0} + u^2\dfrac{\overrightarrow{a_0}}{2} + u^3\dfrac{\overrightarrow{b_0}}{6} + u^4\dfrac{\overrightarrow{c_0}}{24} + \overrightarrow{o}\left(u^4\right)$

1er cas) le point M_0 est birégulier ($(\overrightarrow{v}_0, \overrightarrow{a}_0)$ est libre).
Le point M_0 est un point *ordinaire* de la courbe.

$\overrightarrow{M_0M}(t) = u\,\overrightarrow{v_0} + u^2\dfrac{\overrightarrow{a_0}}{2} + \overrightarrow{o}\left(u^2\right)$
F1
2ème cas) le point M_0 est régulier ($\overrightarrow{v}_0 \neq \overrightarrow{0}$), mais non birégulier ($(\overrightarrow{v}_0, \overrightarrow{a}_0)$ est lié), et $\left(\overrightarrow{v_0}, \overrightarrow{b_0}\right)$ est libre.
Le point M_0 est un *point d'inflexion.*

$\overrightarrow{M_0M}(t) = \left(u + \lambda\dfrac{u^2}{2}\right)\overrightarrow{v_0} + u^3\dfrac{\overrightarrow{b_0}}{6} + \overrightarrow{o}\left(u^3\right).$

F2
REM 1 : pour obtenir ces points, on résout $\begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{vmatrix} = 0$ et on regarde si $\begin{vmatrix} x'(t) & x'''(t) \\ y'(t) & y'''(t) \end{vmatrix} \neq 0.$
REM 2 : Dans le cas d'une courbe $y = f(x)$, cela donne les conditions :

$$f''(x) = 0,\ f'''(x) \neq 0$$

REM 3 : comme $\left(\dfrac{y'}{x'}\right)' = \dfrac{\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}}{x'^2}$, on peut remplacer la résolution de $\begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{vmatrix} = 0$ par celle de $\left(\dfrac{y'}{x'}\right)'(t) = 0$, souvent plus simple.

3ème cas) le point M_0 est stationnaire ($\overrightarrow{v}_0 = \overrightarrow{0}$), mais $\left(\overrightarrow{a}_0, \overrightarrow{b}_0\right)$ est libre.
Le point M_0 est un *point de rebroussement de première espèce.*
$\overrightarrow{M_0M}(t) = u^2\dfrac{\overrightarrow{a_0}}{2} + u^3\dfrac{\overrightarrow{b_0}}{6} + \overrightarrow{o}\left(u^3\right).$

F3
REM : pour obtenir ces points, on résout $x'(t) = y'(t) = 0$ et on regarde si $\begin{vmatrix} x''(t) & x'''(t) \\ y''(t) & y'''(t) \end{vmatrix} \neq 0.$

E6 : $\begin{cases} x = 3t^2 + 2t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$

4ème cas) le point M est stationnaire, ($\overrightarrow{v}_0 = \overrightarrow{0}$), $\left(\overrightarrow{a}_0, \overrightarrow{b}_0\right)$ est lié et ($\overrightarrow{a}_0, \overrightarrow{c}_0$) est libre.
Le point M est un *point de rebroussement de deuxième espèce.*
$\overrightarrow{M_0M}(t) = \left(u^2 + \lambda\dfrac{u^3}{3}\right)\dfrac{\overrightarrow{a_0}}{2} + u^4\dfrac{\overrightarrow{c_0}}{24} + \overrightarrow{o}\left(u^4\right).$

F4
REM : pour obtenir ces points, on résout $x'(t) = y'(t) = \begin{vmatrix} x''(t) & x'''(t) \\ y''(t) & y'''(t) \end{vmatrix} = 0$ et on regarde si $\begin{vmatrix} x''(t) & x^{(4)}(t) \\ y''(t) & y^{(4)}(t) \end{vmatrix} \neq 0.$

E7 : $\begin{cases} x = 5t^2 + 2t^5 \\ y = 2t^2 + t^4 \end{cases}$.
Exemples prototypes :

point ordinaire	point d'inflexion	point de rebroussement de première espèce	point de rebroussement de deuxième espèce
$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$	$\begin{cases} x = t \\ y = t^3 \end{cases}$	$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$	$\begin{cases} x = t^2 + t^3 \\ y = t^4 \end{cases}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

DISCUSSION GÉNÉRALE

$\overrightarrow{M_0M}(t) = u^p\left(1 + \lambda_1 u + ... + \lambda_{q-p}u^{q-1-p}\right)\dfrac{\overrightarrow{f}^{(p)}(t_0)}{p!} + u^q\dfrac{\overrightarrow{f}^{(q)}(t_0)}{q!} + \overrightarrow{o}\left(u^q\right).$
p est le plus petit entier tel que $\overrightarrow{f}^{(p)}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$ et q est le plus petit entier $\geqslant p$ tel que $\left(\overrightarrow{f}^{(p)}(t_0), \overrightarrow{f}^{(q)}(t_0)\right)$ soit libre.
DEF : p et q sont les *entiers fondamentaux* du point $M(t_0)$.

	p pair	p impair
q pair	rebroussement de 2ème espèce cas habituel : $p = 2, q = 4$	point ordinaire cas habituel : $p = 1, q = 2$
q impair	rebroussement de 1ère espèce cas habituel : $p = 2, q = 3$	inflexion cas habituel : $p = 1, q = 3$

4) Étude des branches infinies.

DEF : $t \mapsto M(t)$ possède une *branche infinie* quand $t \to t_0$ si $OM(t) \underset{t \to t_0}{\to} +\infty$, autrement dit, si $x^2(t) + y^2(t) \underset{t \to t_0}{\to} +\infty$.

1er cas : $x(t) \underset{t \to t_0}{\to} \pm\infty$, $y(t) \underset{t \to t_0}{\to} l \in \mathbb{R}$
Asymptote horizontale $y = l$.

2ème cas : $x(t) \underset{t \to t_0}{\to} l \in \mathbb{R}$, $y(t) \underset{t \to t_0}{\to} \pm\infty$
Asymptote verticale $x = l$.

3ème cas $x(t) \underset{t \to t_0}{\to} \pm\infty$, $y(t) \underset{t \to t_0}{\to} \pm\infty$.

DEF : la branche infinie possède une direction asymptotique ssi la droite $(OM(t))$ possède une position limite quand $t \to t_0$, autrement dit si sa pente $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ dit possède une limite a quand $t \to t_0$; le nombre a est appelé la *pente* de la direction asymptotique.

Remarque : cette définition ne dépend pas du point O.

D3
DEF : si le nombre a est fini et si de plus $y(t) - ax(t) \underset{t \to t_0}{\to} b \in \mathbb{R}$, la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe.

Exemples: E8: $\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{1-t^2} \\ y = \dfrac{t}{1-t^2} \end{cases}$ et $\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{1-t^2} \\ y = \dfrac{1}{1-t^2} \end{cases}$ (hyperbole cubique $x^2 y = (y-1)^3$).

Cas habituel (où t_0 est fini):
$$\begin{cases} x(t_0 + u) = \dfrac{a}{u} + b + cu + o(u) \\ y(t_0 + u) = \dfrac{a'}{u} + b' + c'u + o(u) \end{cases}$$

alors $ay(t_0 + u) - a'x(t_0 + u) = ab' - a'b + (ac' - a'c)\, u + o(u)$

L'asymptote est $ay - a'x = ab' - a'b$, et le signe de $ac' - a'c$ donne la position.

REM : il existe d'autre cas que les 3 cas ci-dessus, car on peut très bien avoir $x^2(t) + y^2(t) \underset{t \to t_0}{\to} +\infty$ sans que ni $x(t)$ ni $y(t)$ ne tendent vers l'infini ; exemple :
$$\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \end{cases}$$

5) Points doubles.

DEF $M_0 \left| \begin{array}{l} x_0 \\ y_0 \end{array} \right.$ est un point double de $t \mapsto M(t)$ ssi

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad \exists t_1 \neq t_2 \ \ M(t_1) = M(t_2) = M_0 \\ &\Leftrightarrow \quad \exists t_1 \neq t_2 \ \begin{cases} x(t_1) = x(t_2) = x_0 \\ y(t_1) = y(t_2) = y_0 \end{cases} \end{aligned}$$

Pour déterminer les points doubles, on résout donc le système $\begin{cases} x(t_2) - x(t_1) = 0 \\ y(t_2) - y(t_1) = 0 \end{cases}$ en cherchant à simplifier par $t_2 - t_1$.

E9 : $\begin{cases} x = \dfrac{t^2-1}{t} \\ y = \dfrac{t^2}{t-1} \end{cases}$ $(xy\,(y-x-1) = 1+2y)$ et $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \sin 3t \end{cases}$ (courbe de Lissajous).

IV) COURBES EN COORDONNÉES POLAIRES
1) Coordonnées polaires.

P plan euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, $\rho, \theta \in \mathbb{R}$, $M \in P$

DEF : (ρ, θ) est un couple de *coordonnées polaires* de M si

$$\overrightarrow{OM} = \rho\left(\cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j}\right) = \rho\,\overrightarrow{u}_\rho$$

autrement dit, si M est d'affixe $\rho e^{i\theta}$.

Attention : contrairement aux coordonnées cartésiennes, le couple des coordonnées polaires n'est pas unique :

PROP : (ρ, θ) et (ρ', θ') sont des couples de coordonnées polaires du même point M ssi

$\rho = \rho' = 0$
ou $\rho' = \rho$ et $\theta' \equiv \theta\ \ [2\pi]$
ou $\rho' = -\rho$ et $\theta' \equiv \theta + \pi\ \ [2\pi]$

2) Équation polaire.

DEF : si f est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, "$f(\rho,\theta) = 0$" est une *équation polaire* d'une courbe (C) du plan si (C) est l'ensemble des points du plan dont l'un des couples de coordonnées polaire (ρ, θ) vérifie $f(\rho, \theta) = 0$.

si f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\begin{cases} \rho = f(t) \\ \theta = g(t) \end{cases}$ est une représentation paramétrique polaire de (C) est l'ensemble des points du plan dont l'un des couples de coordonnées polaire (ρ, θ) vérifie $\exists t \in D_f \cap D_g \ / \begin{cases} \rho = f(t) \\ \theta = g(t) \end{cases}$.

Voici en résumé les six types d'équations :

	équation	équation résolue	représentation paramétrique
cartésienne	$f(x,y) = 0$ maple : implicitplot(f(x,y), x=a..b, y=c..d) ex : $(x-1)^2 + y^2 - 1 = 0$	$y = f(x)$ maple : plot(f(x), x=a..b) ex : $y = \pm\sqrt{2x - x^2}$	$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ maple : plot([f(t),g(t), t=a..b]) ex : $\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$
polaire	$f(\rho,\theta) = 0$ maple : implicitplot(f(ρ,θ),ρ=a..b,θ=c..d,coords=polar) ex : $\rho - 2\cos\theta = 0$	$\rho = f(\theta)$ maple : polarplot(f(t), t=a..b) ex : $\rho = 2\cos\theta$	$\begin{cases} \rho = f(t) \\ \theta = g(t) \end{cases}$ maple : polarplot([f(t),g(t), t=a..b]) ex : $\begin{cases} \rho = 2\cos t \\ \theta = t \end{cases}$

REMARQUE : les équations cartésiennes d'une même courbe sont toutes équivalentes, mais ce n'est pas le cas des équations polaires : par exemple, $\rho = R$ ou $\rho = -R$ représentent toutes les deux le même cercle.

Passage d'une équation à une autre:

équation cartésienne vers équation polaire : remplacer x par $\rho\cos\theta$ et y par $\rho\sin\theta$

passage inverse : rien d'automatique ! remplacer $\cos\theta$ par $\dfrac{x}{\rho}$, $\sin\theta$ par $\dfrac{y}{\rho}$ puis ρ^2 par $x^2 + y^2$.

L'équation polaire $\rho = f(\theta)$ donne directement comme représentation cartésienne paramétrique :

$$\begin{cases} x = f(t)\cos t \\ y = f(t)\sin t \end{cases}$$

Inversement : une représentation cartésienne paramétrique pouvant se mettre sous la forme

$$\begin{cases} x = f(u(t))\cos u(t) \\ y = f(u(t))\sin u(t) \end{cases}$$

donne pour équation polaire $\rho = f(\theta)$ (si $u(t)$ décrit un intervalle d'amplitude 2π).

Exemple E9 (cochléoïde) : $\begin{cases} x = \dfrac{\sin t}{t} \\ y = \dfrac{1-\cos t}{t} \end{cases}$

D4

Équations polaires à savoir reconnaître :
$\rho = a\cos\theta + b\sin\theta$ est l'équation d'un cercle passant par O de diamètre $\sqrt{a^2+b^2}$
$\rho = \dfrac{a}{\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta}$ est l'équation d'une droite distante de O de $\dfrac{|a|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.

D5

V) ÉTUDE D'UNE COURBE $\rho = f(\theta)$

1) Réduction de l'intervalle d'étude.

	$\rho \to \rho$	$\rho \to -\rho$
$\theta \to \theta + \theta_0$	étude $\theta \in [a, a+\theta_0]$ puis rot_{0,θ_0} itérée	étude $\theta \in [a, a+\theta_0]$ puis $rot_{0,\theta_0+\pi}$ itérée
cas $\theta_0 = 2\pi$	étude $\theta \in [a, a+2\pi]$ on obtient toute la courbe	étude $\theta \in [a, a+2\pi]$ puis sym_0
cas $\theta_0 = \pi$	étude $\theta \in [a, a+\pi]$ puis sym_0	étude $\theta \in [a, a+\pi]$ on obtient toute la courbe
$\theta \to \theta_1 - \theta$	étude $\theta \in [\frac{\theta_1}{2}, +\infty[$ puis $sym_{\theta=\frac{\theta_1}{2}}$	étude $\theta \in [\frac{\theta_1}{2}, +\infty[$ puis $sym_{\theta=\frac{\theta_1}{2}+\frac{\pi}{2}}$
cas $\theta_1 = 0$	étude $\theta \in [0, +\infty[$ puis sym_{Ox}	étude $\theta \in [0, +\infty[$ puis sym_{Oy}

Bien commencer par le $\theta_0 > 0$, puis le $\theta_1 \geqslant 0$, et les choisir tout de suite les plus petits possibles.
EXEMPLE E10 : $\rho = \cos 2\theta$ (quadrifolium).

2) Étude des tangentes.

On pose $\begin{cases} \overrightarrow{u_\rho} = \cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{u_\theta} = r_{\pi/2}\left(\overrightarrow{u_\rho}\right) = \dfrac{d\overrightarrow{u_\rho}}{d\theta} = -\sin\theta\,\overrightarrow{i} + \cos\theta\,\overrightarrow{j} \end{cases}$ $(M(\theta), \overrightarrow{u_\rho}, \overrightarrow{u_\theta})$ est le *repère tournant.*

On a alors $\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u_\rho} \\ \dfrac{d\overrightarrow{M}}{d\theta} = \dfrac{d\rho}{d\theta}\overrightarrow{u_\rho} + \rho\overrightarrow{u_\theta} \end{cases}$

La tangente en $M(\theta)$ à la courbe $\rho = f(\theta)$ est donc dirigée par le vecteur de coordonnées $\begin{cases} \dfrac{d\rho}{d\theta} = \rho' = f'(\theta) \\ \rho = f(\theta) \end{cases}$ DANS LA BASE TOURNANTE.

L'angle ψ entre (OM) et la tangente est donc donné par

$$\tan\psi = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{f(\theta)}{f'(\theta)}$$

REMARQUE IMPORTANTE :

Si la courbe passe par O pour $\theta = \theta_0$, et $\rho'(\theta_0) \neq 0$, $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}(\theta_0)$ est colinéaire à $\overrightarrow{u_\rho}(\theta_0)$: la tangente à la courbe en O est donc toujours la droite $\theta = \theta_0$ (et on démontre que ce résultat subsiste même si $\rho'(\theta_0) = 0$)
D5

Alexandrin à retenir : quand la courbe est en O, la tangente est $\overrightarrow{u_\rho}$.
3) Tableau de variations.

E11
$\rho = a\theta$ (tracé avec $a = \dfrac{1}{2\pi}$; spirale d'Archimède) ; $\rho = e^{a\theta}$ (tracé avec $a = \dfrac{\ln 2}{2\pi}$; spirale logarithmique) ; $\rho = 1 + \cos\theta$ (cardioïde).

4) Branches infinies.

PROP : la courbe $\rho = f(\theta)$ possède une branche infinie quand $\theta \to \theta_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ si $\lim\limits_{\theta\to\theta_0} |f(\theta)|) = +\infty$.

1er cas $\lim\limits_{\theta\to\pm\infty} f(\theta)) = \pm\infty$

La courbe présente une branche en spirale (cf. les deux premiers exemples E10)

2ème cas $\lim\limits_{\theta\to\theta_0} f(\theta)) = \pm\infty$ avec $\theta_0 \in \mathbb{R}$

PROP1 : la branche infinie possède alors toujours une direction asymptotique, de pente $\tan\theta_0$.

D6

PROP2 : la courbe possède alors une asymptote ssi le nombre $d = \rho\sin(\theta - \theta_0)$ possède une limite finie d_0 quand $\theta \to \theta_0$.
L'asymptote a pour équation $Y = d_0$ dans le repère $(0, \overrightarrow{u_\rho}(\theta_0), \overrightarrow{u_\theta}(\theta_0))$, ce qui donne pour équation cartésienne dans $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$:

$$-\sin\theta_0 x + \cos\theta_0 y = d_0 \qquad \text{ou encore } y = \tan\theta_0 x + \frac{d_0}{\cos\theta_0} \text{ si } \theta_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$$

D7
E12 : $\rho = \dfrac{1}{\cos 2\theta}$ (cruciforme).

REM : si $\theta_0 = k\pi$, chercher simplement la limite de $y = \rho\sin\theta$, et si $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, chercher la limite de $x = \rho\cos\theta$.

E13 : $\rho = \tan\theta$ (kappa), $\rho = \cot 2\theta$ (moulin à vent).