III) Notions sur les ensembles.

1) Généralités.

Un *ensemble* est une collection d'objets, appelés ses *éléments*, considérés sans ordre, ni répétition possible ; "x est élément de l'ensemble E" se dit aussi "x *appartient* à E", ou "E *contient* x" et se note $x \in E$, ou $E \ni x$. (Le symbole $\in$ vient de la lettre epsilon ϵ, première lettre du verbe *être* en grec).

REM : la notion d'ensemble est une notion première ; ce qui précède n'est pas une définition...
Par contre, les ensembles permettent de définir tous les objets mathématiques.

On écrit un ensemble *en extension* en écrivant tous ses éléments entre des accolades ; par exemple :

$$\{1,2\} = \{1,1,2\} = \{2,1\}$$

Un ensemble sans élément est dit *vide* : notation : $\emptyset$ ou $\{\ \}$.

ATTENTION : l'ensemble $\{\emptyset\}$ N'EST PAS VIDE ; il a un élément qui est l'ensemble vide.

Un ensemble à un seul élément est appelé un *singleton*, un ensemble à deux éléments, une *paire*.

Etant donné un ensemble E, toute propriété P des éléments de E définit un *sous-ensemble*, (ou *partie*) de E, ensemble F des éléments de E ayant la propriété P ; on note

$$F = \{x \in E \ / \ P(x)\}$$

Un tel ensemble est dit défini *en compréhension*, ou en *intension*)

Par conséquent, pour un élément x de E, $x \in F$ équivaut à $P(x)$.

ABRÉVIATION IMPORTANTE : si f est une application de E vers F, l'ensemble

$$\{y \in F \ / \ \exists x \in E \ / \ y = f(x)\}$$

s'écrit plus simplement sous la forme :

$$\{f(x) \ / \ x \in E\}$$

(lire : ensemble des $f(x)$ pour x décrivant E)

Exemples E1

L'ensemble des naturels pairs $\{n \in \mathbb{N} \ / \ \exists p \in \mathbb{N} \ / \ n = 2p\}$, s'écrit plus simplement sous la forme $\{2p \ / \ p \in \mathbb{N}\}$ ou encore $2\mathbb{N}$.

Écrire de la même façon l'ensemble des naturels impairs, l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux (quotients d'un entier par une puissance de 10), l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels (quotients de 2 entiers), la courbe d'une fonction f (ensemble des points $M(x,y)$ du plan P vérifiant $y = f(x)$), la courbe d'équation $x^2 - xy + y^3 = 0$.

2) L'inclusion des ensembles.

DEF : un ensemble A est dit *inclus* dans un ensemble B si tout élément de A est aussi un élément de B ; on dit aussi que A est un *sous-ensemble* de B, ou une *partie* de B, ou encore que B *inclut* A :

$$A \subset B \, (\Leftrightarrow B \supset A) \Leftrightarrow \forall x \in A \ \ x \in B$$

IMPORTANT : si A et B sont définis par des propriétés P et Q comme sous-ensembles de E, l'inclusion de A dans B équivaut à l'implication $P \Rightarrow Q$:

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in E \ \ P(x) \Rightarrow Q(x))$$

E2 : $y=x^2$ et $y^2=x^4$; $y \leqslant \sqrt{1-x^2}$ et $y^2 \leqslant 1-x^2$.

3) L'égalité des ensembles.

DEF : deux ensembles sont égaux s'ils ont exactement les mêmes éléments ; l'égalité équivaut donc à la double inclusion :

$$A=B \Leftrightarrow A \subset B \text{ et } B \subset A$$

IMPORTANT : si A et B sont définis par des propriétés P et Q comme sous-ensembles de E, l'égalité de A et B équivaut à l'équivalence des propriétés P et Q :

$$A=B \Leftrightarrow \forall x \in E \;\; P(x) \Leftrightarrow Q(x)$$

PROP : négation de l'inclusion et de l'égalité :

$A \not\subset B \Leftrightarrow$ ....
$A \neq B \Leftrightarrow A \not\subset B$ ou $B \not\subset A \Leftrightarrow$ ....

4) Ensemble des parties d'un ensemble.

Notation : l'ensemble de toutes les parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$; il contient en particulier la partie vide $\emptyset$ et la partie *pleine* E ; les autres parties sont dites *propres*.

On a donc l'équivalence importante :

$$A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E$$

E3 : $\mathcal{P}(\emptyset)=$ .... ;$\mathcal{P}(\{a\})=$ .... ; $\mathcal{P}(\{a,b\})=$ ....

Étant donné un ensemble E, on considérera souvent 3 niveaux :

- celui des éléments de E, notés par des petites lettres x, y, etc...
- celui des parties de E, incluses dans E (i.e. éléments de $\mathcal{P}(E)$), notées par des majuscules droites : $A=\{x,y\}$ etc...
- celui des ensembles de parties de E, inclus dans $\mathcal{P}(E)$ (i.e. éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$), notés par des majuscules arrondies : $\mathcal{A}=\{\{x,y\},\{x\}\}$ etc...

5) Opérations sur les ensembles.
Les ensembles ici considérés sont supposés être inclus dans un ensemble dit de référence E.

a) Complémentarisation.

DEF : le *complémentaire* d'un ensemble A (dans E) est l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A.

$$E \backslash A=\{x \in E \;/\; x \notin A\}$$

Notation simplifiée, s'il n'y a pas d'ambiguité sur l'ensemble de référence :

$$\overline{A} \text{ ou } {}^{c}A$$

Par conséquent

$$\forall x \in E \quad x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$$

La complémentarisation est aux ensembles ce que la négation est aux propriétés.

Diagramme de Venn V1
PROP : $\overline{\overline{A}}=A$

b) Réunion et intersection.

DEF : la *réunion* de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B $A \cup B = \{x \in E \ / \ x \in A \text{ ou } x \in B\}$ Par conséquent : $\forall x \in E \quad x \in \ A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B$ La réunion est aux ensembles ce que la *disjonction* est aux propriétés.	DEF : l'*intersection* de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à la fois à A et à B $A \cap B = \{x \in E \ / \ x \in A \text{ et } x \in B\}$ Par conséquent : $\forall x \in E \quad x \in \ A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B$ L'intersection est aux ensembles ce que la *conjonction* est aux propriétés.

Diagramme de Venn V2

P1 : (lois de Morgan)

$$\begin{aligned} \overline{A \cup B} &= \text{............................} \\ \overline{A \cap B} &= \text{............................} \end{aligned}$$

P2 : commutativité :

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A \\ A \cap B &= B \cap A \end{aligned}$$

P3 : associativité :

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \quad \text{(donc noté sans parenthèse)} \\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \quad \text{(donc noté sans parenthèse)} \end{aligned}$$

P4 : distributivité mutuelle :

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cup C &= \text{.....................................} \\ (A \cup B) \cap C &= \text{.......................................} \end{aligned}$$

P5 :

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = \text{.......} \Leftrightarrow A \cup B = \text{...............} \Leftrightarrow \overline{A} \text{......} \overline{B}$$

D1

c) Différence.

DEF : la *différence* des ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A et pas à B.

$$A - B = A \setminus B = \{x \in E \ / \ x \in A \ et \ x \notin B\} = A \cap \overline{B}$$

Diagramme de Venn V3

d) (hors programme) Différence symétrique.

DEF : la *différence symétrique* de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B mais pas à A et à B.

$$A \ \Delta \ B = \{x \in E \ / \ \text{soit } x \in A \text{ soit } x \in B\}$$

Elle correspond donc au "ou exclusif" sur les propriétés.

PROP :

$$A \ \Delta \ B = (A \cup B) \ \setminus \ (A \cap B) = (A \setminus B) \ \cup \ (B \setminus A)$$

D2

Diagramme de Venn V4

Exercice : montrer que la différence symétrique est associative.

6) Réunion et intersection d'une famille d'ensembles.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E, indexée par un ensemble I quelconque (la notion de famille sera vue ultérieurement).

DEF : la *réunion* des ensembles de la famille (A_i) est l'ensemble des éléments appartenant à l'un des A_i $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \{x \in E \ / \ \exists i \in I \ / \ x \in A_i\}$ Par conséquent : $\forall x \in E \quad x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I \ / \ x \in A_i$	DEF : l'*intersection* des ensembles de la famille (A_i) est l'ensemble des éléments appartenant à tous les A_i $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = \{x \in E \ / \ \forall i \in I \ \ x \in A_i\}$ Par conséquent : $\forall x \in E \quad x \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I \ \ x \in A_i$

E4 : $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} [n, n+1[= \ldots\ldots\ldots\ldots$; $\bigcup\limits_{n\geqslant 1} \left[\frac{1}{n}, 1\right] = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $\bigcap\limits_{n\geqslant 1} \left]-\frac{1}{n}, 1\right] = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\} = \bigcup\limits_{\ldots\ldots\ldots} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$;

$D_{\cot} = \mathbb{R} \setminus \{\ldots\ldots\ldots\ldots \ / \ k \in \mathbb{Z}\} = \bigcup\limits_{\ldots\ldots\ldots} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

7) Ensembles disjoints et ensembles distincts.

DEF : deux ensembles sont dits *disjoints* quand leur intersection est vide, et *distincts* quand ils ne sont pas égaux.

REM : $\emptyset$ est disjoint de lui-même, mais n'en est pas distinct ! A part ça, disjoints implique distincts.

PROP : A et B sont

disjoints	distincts
$\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$	$\Leftrightarrow A \not\subset B$ ou $B \not\subset A$
$\Leftrightarrow A \subset \overline{B}$	$\Leftrightarrow A \backslash B$ ou $B \backslash A$est $\neq \emptyset$
$\Leftrightarrow B \subset \overline{A}$	$\Leftrightarrow$ il existe un élement appartenant à l'un des ensembles et pas à l'autre

D3

8) Notion de partition.

DEF : une *partition* d'un ensemble E est un *ensemble* de parties non vides de E (les *composantes* de la partition), deux à deux disjointes, et dont la réunion est égale à E :

$$\mathcal{E} \text{ est une partition de } \Leftrightarrow \begin{cases} 1.\ \mathcal{E} \subset \mathcal{P}(E) \\ 2.\ \forall A \in \mathcal{E} \ \ A \neq \emptyset \\ 3.\ \forall A, B \in \mathcal{E} \ \ A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset \\ 4.\ \bigcup\limits_{A\in\mathcal{E}} A = E \end{cases}$$

E4

9) Notion de liste : couples, triplets, ..., $n-$uplets.

Une *liste,* ou *suite finie,* ou encore *famille finie* est une collection finie d'objets, appelés ses *éléments*, considérés avec ordre, et répétitions possibles.

Le nombre d'éléments de la liste s'appelle sa *taille* ou son *ordre* ou encore, sa *longueur* ;

$$\text{les listes de taille } \begin{cases} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ .. \\ n \end{cases} \text{ sont des } \begin{cases} \text{couples} \\ \text{triplets} \\ \text{quadruplets} \\ \text{quintuplets} \\ \ldots \\ n-\text{uplets (ou parfois } n-\text{listes)} \end{cases}.$$

On peut définir les listes à partir de la notion d'ensemble de la façon suivante :

2)	$(x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\}$
3)	$(x,y,z) = ((x,y),z)$
...	
n)	$(x_1,...,x_n) = ((x_1,...,x_{n-1}),x_n)$

L'écriture de la liste $(a_1,...,a_n)$ est parfois abrégée en $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$; a_i est appelé la $i-$éme *coordonnée* de la liste.

L'égalité de deux $n-$uplets se traduit comme suit :

$$(x_1,...,x_n) = (y_1,...,y_n) \Leftrightarrow \forall i \in [|1,n|] \quad x_i = y_i$$

Étant donnés n ensembles $E_1,...,E_n$ l'ensemble de tous les $n-$uplets dont la $i-$ème coordonnée est un élément de E_i s'appelle le *produit cartésien* des ensembles $E_1,...,E_n$, en l'honneur de Descartes qui a le premier dégagé la notion de coordonnée :

$$E_1 \times E_2 \times ... \times E_n \text{ (ou } \prod_{i=1}^{n} E_i) = \{(x_1,...,x_n) \ / \ \forall i \in [|1,n|] \quad x_i \in E_i\}$$

$\overbrace{E \times E \times ... \times E}^{n \text{ fois}}$ est abrégé en E^n.

Exemples :
$\{1\} \times \{1,2\} \times \{1,2,3\} = \{$..$\}$

Hachurer dans le plan $([0,1] \cup [2,3]) \times [0,3]$

10) Ensembles finis.
a) Cardinal (ou taille) d'un ensemble fini.

DEF : on dit qu'un ensemble est de *cardinal* (ou *taille*, ou, plus prosaïquement, *nombre d'éléments*) $n \in \mathbb{N}$ s'il est vide quand $n = 0$, ou s'il est en bijection avec $[|1,n|]$ sinon.
(La notion de bijection sera étudiée ultérieurement)

PROP : le nombre n défini ci-dessus est unique ; on utilise les notations $n = |E| = Card\,(E) = \#\,(E)$, ou l'on dit que E est un $n-$ensemble.

DEF : un ensemble ayant une taille finie est dit *fini*, *infini* sinon.

b) Propriétés de la taille d'un ensemble fini.

Ici A, B, C désignent des ensembles finis.
P1 : deux ensembles fini ont même taille si et seulement s'ils sont en bijection :

$$|A| = |B| \Leftrightarrow \text{Bij}\,(A,B) \neq \emptyset$$

P2 : la taille d'une partie est inférieure ou égale à la taille du tout :

$$A \subset B \Rightarrow |A| \leqslant |B|$$

(réciproque fausse bien sur).

P3 : deux ensembles finis ayant la même taille et inclus l'un dans l'autre sont égaux :

$$(A \subset B \text{ et } |A| = |B|) \Rightarrow A = B$$

REM : cette propriété, très utile, est fausse pour des ensembles infinis : par exemple,

$$\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N},\ \mathbb{N}^* \text{ est en bijection avec } \mathbb{N}, \text{ mais } \mathbb{N}^* \neq \mathbb{N} \ \ !!$$

P4 : la réunion de deux ensembles finis est un ensemble fini, et

$$|A \cup B| = |A| + |B| - \text{........................(formule de Poincaré)}$$

D4 (partielle).

Application : calculer $|A \cup B \cup C|$ en fonction des tailles de $A, B, C, A \cap B$ etc...
Généralisation : formule die "du crible" donnant la taille de $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.
E5

11) Dénombrements fondamentaux.
a) Nombre de parties d'un ensemble.

Exemples :
$|\mathcal{P}(\emptyset)| = |\{.....\}| =$ .... ; $|\mathcal{P}(\{a\})| = |\{....................\}| =$ .... ; $|\mathcal{P}(\{a,b\})| = |\{............................\}| =$ ....

Lemme 1: dans un ensemble fini, il y a autant de parties contenant un élément donné que de parties ne le contenant pas.

Lemme 2 : si $x_0 \in E$ fini, $|\mathcal{P}(E)| = 2\,|\mathcal{P}(E \backslash \{x_0\})|$.

TH : un ensemble à n éléments possède ...... parties :

$$|\mathcal{P}(E)| = \text{.................}$$

D5

b) Dénombrements de produits cartésiens.

P1 : si E et F sont finis, $|E \times F| =$ ....

CORO 1: $|E_1 \times E_2 \times ..... \times E_n| =$ ....

CORO 2 : $|E^n| =$ ....
D6