B) MATRICES

E,F et G désignent toujours des K-espaces vectoriels.

RAPPELS : une matrice A à n lignes et p colonnes (ou *de format* (n,p)) à coefficients dans K est une application de $[|1,n|]\times[|1,p|]$ dans K ;
pour $(i,j)\in[|1,n|]\times[|1,p|]$, $A(i,j)$ est souvent noté de façon indicielle a_{ij}, de sorte que A est notée $(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$;

on la représente aussi par le tableau rectangulaire : $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1p}\\ a_{21} & a_{22} & a_{2p}\\ \cdots & & \\ a_{n1} & & a_{np}\end{bmatrix} = \begin{array}{c} \\ i \\ \end{array}\begin{array}{c} \quad\quad\quad j \\ \begin{bmatrix} & & a_{1j} & & \\ & & \cdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip}\\ & & \cdots\cdot & & \\ & & a_{nj} & & \end{bmatrix}\end{array}$;

l'ensemble $K^{[|1,n|]\times[|1,p|]}$ de ces matrices est noté $M_{np}(K)$; on sait que c'est un K-espace vectoriel de dimension np, (donc isomorphe à K^{np}), dont la base canonique est formée des matrices canoniques $(E_{kl})_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\1\leqslant l\leqslant p}}$ avec $E_{kl}(i,j)=\delta_{\dots.}\delta_{\dots.}$.

I) MATRICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE RELATIVEMENT À DEUX BASES.

1) Propriété fondamentale.

PROP : la connaissance des images des vecteurs d'une base de l'espace de départ caractérise entièrement une application linéaire ; plus précisément :

si $\boxed{\text{(H)} : \left(\begin{array}{c}\mathcal{B}=(\overrightarrow{e_1},...,\overrightarrow{e_n}) \text{ base de } E\\ (\overrightarrow{y_1},...,\overrightarrow{y_n})\in F^n\end{array}\right.}$ alors $\boxed{\text{(C)} : \exists! f\in L(E,F)\ /\ \forall i\in[|1,n|]\ \ f(\overrightarrow{e_i})=\overrightarrow{y_i}}$

D1

2) Définition.

DEF : la *matrice* d'une application linéaire entre espaces de dimensions finies *relativement à (ou dans)* une base de l'espace de départ et une base de l'espace d'arrivée, est la matrice dont les *colonnes* sont les coordonnées dans la base d'arrivée des images des vecteurs de la base de départ ; autrement dit :

si $\boxed{\left(\begin{array}{l} f\in L(E,F)\\ \mathcal{B}=(\overrightarrow{e_1},...,\overrightarrow{e_n}) \text{ base de } E\\ \mathcal{C}=\left(\overrightarrow{f_1},...,\overrightarrow{f_p}\right) \text{ base de } F\\ A=(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant n}}\in\mathcal{M}_{pn}(K)\end{array}\right.}$ alors $\boxed{A=\underset{(\mathcal{B},\mathcal{C})}{\mathrm{mat}}(f)\overset{def}{\Leftrightarrow}\forall j\in[|1,n|]\quad f(\overrightarrow{e_j})=\sum_{i=\dots.}^{\dots.}a_{\dots..}\overrightarrow{f_{\dots}}}$

Par une représentation en tableau : $\begin{array}{c} f(\overrightarrow{e_1})\ \ \cdots\ \ f(\overrightarrow{e_j})\ \ \cdots\ \ f(\overrightarrow{e_n}) \\ \begin{bmatrix} & & a_{1j} & & \\ & & \cdots & & \\ a_{i1} & \cdots\cdots\cdots & a_{ij} & \cdots\cdots\cdots & a_{in}\\ & & \cdots\cdot & & \\ & & a_{pj} & & \end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\overrightarrow{f_1}\\ \cdots\\ \overrightarrow{f_i}\\ \cdots\\ \overrightarrow{f_p}\end{array}$

a_{ij} est donc la .....ème coordonnée dans la base d'arrivée de l'image par f du .....ième vecteur de la base de départ.

ATTENTION : une matrice d'une application linéaire d'un espace de dimension n vers un espace de dimension p est de format (p,n) et non (n,p) !

REM : pour la matrice d'un endomorphime de E, on prend en général la même base pour E en tant qu'espace de départ, et pour E en tant qu'espace d'arrivée ; notation : $\mathrm{mat}_{(\mathcal{B},\mathcal{B})}(f)$ est simplifié en $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Vocabulaire : la matrice d'une application linéaire de K^n dans K^p relativement aux bases canoniques de K^n et K^p est appelée la *matrice canonique* de cette application.

3) Exemples.

E1 :

- la matrice canonique de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ est $\begin{bmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{bmatrix}$.
- la matrice canonique de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \\ ex+fy \end{pmatrix}$ est $\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$
- la matrice canonique de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax+by+cz \\ dx+ey+fz \end{pmatrix}$ est
- la matrice canonique de $x \mapsto (ax, bx, cx)$ est
- la matrice canonique de $(x,y,z) \mapsto ax+by+cz$ est
- la matrice de l'application nulle de E de dimension n vers F de dimension p est, quelles que soient les bases choisies :

$$\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} = 0_{\ldots\ldots}$$

- la matrice de l'identité est indépendante de la base choisie :

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(id_E) = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} = (\delta_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

Cette matrice est appelée la *matrice identité* d'ordre n et notée I_n.

REM : si l'on ne prend pas la même base pour le départ et pour l'arrivée, la matrice de l'identité n'est plus la matrice identité ! Par exemple, si E est de base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ et $\begin{cases} \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_4} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} \end{cases}$,

$$\operatorname{mat}_{((\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_4}),(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}))}(id_E) = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}, \operatorname{mat}_{((\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}),(\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_4}))}(id_E) = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$$

- la matrice de l'homothétie de rapport a, $h_a = a.id_E$ est aussi indépendante de la base choisie :

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(h_a) = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} = aI_n$$

- par contre, la matrice d'une projection ou d'une symétrie dépend de la base choisie.

DEF : si $E = F \oplus G$, on dit qu'une base $\mathcal{B}$ de E est *adaptée* à cette décomposition si c'est la concaténation d'une base de F et d'une base de G.

Si donc, $\mathcal{B}$ est adaptée, $p =$ projection de base F et de direction G, $q = id_E - p, s = p - q$

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

- la matrice de la dérivation de $K_3[X]$ dans $K_2[X]$ dans les bases canoniques est :

$$\begin{bmatrix} .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. \end{bmatrix}$$

4) Caractérisation d'une application linéaire par l'une de ses matrices.

PROP (corollaire de la propriété fondamentale ci-dessus) : si $\mathcal{B}$ base de E de dimension $n, \mathcal{C}$ base de F de dimension p et $A \in M_{pn}(K)$, il existe une unique application linéaire $f \in L(E,F)$ telle que

$$A = \text{mat}_{(\mathcal{B},\mathcal{C})}(f)$$

Ceci signifie que l'application : $\left\{ \begin{array}{l} \text{..........} \to \text{.........} \\ \text{..........} \mapsto \text{.........} \end{array} \right.$ est ....

II) OPÉRATIONS SUR LES MATRICES

1) Addition et multiplication externe.

Notions déjà vues dans le cours sur les espaces vectoriels ; notons qu'on ne peut additionner que des matrices de mêmes formats. On sait que $(M_{np}(K), +, .(\text{ext.}))$ a une structure de ....

PROP : si $\mathcal{B}$ base de E de dimension n, $\mathcal{C}$ base de F de dimension p, $f \in L(E,F)$ et $\lambda \in K$, on a

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{mat}_{(\mathcal{B},\mathcal{C})}(f+g) = \text{mat}_{(\mathcal{B},\mathcal{C})}(f) + \text{mat}_{(\mathcal{B},\mathcal{C})}(g) \\ \hline \text{mat}_{(\mathcal{B},\mathcal{C})}(\lambda f) = \lambda\, \text{mat}_{(\mathcal{B},\mathcal{C})}(f) \end{array}}$$

Ceci signifie que l'application : $\left\{ \begin{array}{l} \text{..........} \to \text{.........} \\ \text{..........} \mapsto \text{.........} \end{array} \right.$ est .... ; combiné avec la propriété ci-dessus, c'est donc un ....

D2

COROLLAIRE : si les ev E et F sont de dimensions finies, $L(E,F)$ est lui aussi de dimension finie et

$$\boxed{\dim L(E,F) = \text{.................}}$$

2) Multiplication des matrices.

a) Recherche de la définition.

Le produit des matrices va être défini de sorte qu'au *produit* de deux matrices corresponde la *composée* des applications linéaires associées ; recherchons donc la matrice d'une composée d'applications linéaires.

PROP : si $\boxed{\left\{ \begin{array}{l} f \in L(E,F) \\ g \in L(F,G) \end{array} \right. , \left(\begin{array}{l} \mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n}) \text{ base de } E \\ \mathcal{C} = (\overrightarrow{f_1}, ..., \overrightarrow{f_p}) \text{ base de } F \\ \mathcal{D} = (\overrightarrow{g_1}, ..., \overrightarrow{g_q}) \text{ base de } G \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} A = \text{mat}_{(\mathcal{B},\mathcal{C})}(f) \in M_{pn}(K) \\ B = \text{mat}_{(....,.....)}(g) \in M_{.......}(K) \\ C = \text{mat}_{(....,....)}(g \circ f) \in M_{........}(K) \end{array} \right.}$

alors

$$C(i,j) = \sum_{k=1}^{.......} B(i,k)\, A(k,j), \text{ pour tout } (i,j) \in [|1, ...|] \times [|1, ...|]$$

D3

D'où la

b) Définition.

DEF : si A est une matrice de format (n,p) et B une matrice de format (p,q) la matrice produit AB est la matrice de format (n,q) définie par

$$(AB)(i,j) = \sum_{k=1}^{p} A(i,k)\, B(k,j) \text{ pour tout } (i,j) \in [|1,n|] \times [|1,q|]$$

REM 0 : remarquer l'espèce de "relation de Chasles" :

$$\text{format } (n,p) \times \text{format } (p,q) = \text{format } (n,q)$$

REM 1 : il est pratique de présenter le produit de 2 matrices sous la forme :

F1

REM 2 : le produit matriciel n'est donc pas une loi de composition interne dans l'ensemble de toutes les matrices, ni même dans $M_{np}(K)$ avec $n \neq p$; par contre, c'en est une dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre n $M_n(K)$.

REM 3 : le produit matriciel n'est évidemment pas commutatif puisqu'un produit peut être possible dans un sens et ne pas l'être dans l'autre.

REM 4 : le nombre $\left\{ \begin{array}{l} \text{d'additions} \\ \text{de multiplications} \end{array} \right.$ pour effectuer $(AB)(i,j)$ vaut $\left\{ \begin{array}{l} \text{.....} \\ \text{......} \end{array} \right.$, donc

le nombre $\left\{ \begin{array}{l} \text{d'additions} \\ \text{de multiplications} \end{array} \right.$ pour effectuer le produit AB vaut $\left\{ \begin{array}{l} \text{.....} \\ \text{......} \end{array} \right.$

REM 5 : le produit d'une matrice-ligne (format $(1,n)$) par une matrice-colonne (format $(n,1)$) donne une matrice de format $(1,1)$, que l'on identifie avec son coefficient :

$$[a_1, ..., a_n] . \begin{bmatrix} b_1 \\ ... \\ b_n \end{bmatrix} = \left[\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right] \overset{\text{abus d'écriture}}{=} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

REM 6 : avec cet abus d'écriture, le coefficient $(AB)(i,j)$ de la ième ligne et de la jème colonne de AB s'interprète comme le produit matriciel de la ième ligne L_i de A et de la jème colonne C_j de B ; en effet :

$$L_i C_j = [a_{i1}, ..., a_{ip}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ ... \\ b_{pj} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} = (AB)(i,j)$$

REM 7 : le produit d'une matrice-colonne (format $(n,1)$) par une matrice-ligne (format $(1,n)$) donne une matrice carrée d'ordre n :

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \end{bmatrix} [b_1, ..., b_n] = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} = (..........)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

c) Propriétés.

α) Matrice d'une composée.

PROP (due à la définition même du produit des matrices) :

si $\boxed{\left\{ \begin{array}{l} f \in L(E,F) \\ g \in L(F,G) \end{array} \right. , \left(\begin{array}{l} \mathcal{B} \text{ base de } E \\ \mathcal{C} \text{ base de } F \\ \mathcal{D} \text{ base de } G \end{array} \right.}$, alors $\boxed{\mathrm{mat}_{(\mathcal{B},\mathcal{D})}(g \circ f) = \mathrm{mat}_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}(g) \times \mathrm{mat}_{(\mathcal{B},\mathcal{C})}(f)}$.

ATTENTION : On n'a donc malheureusement qu'une relation de Chasles "à l'envers" :-(par contre, pour les endomorphismes, tout va bien :-)
si $\boxed{f \in L(E) \ , \ \mathcal{B} \text{ base de } E}$, alors $\boxed{\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(g) \times \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)}$

α) "Associativité".

PROP : si $\left\{ \begin{array}{l} A \in \mathcal{M}_{np}(K) \\ B \in \mathcal{M}_{pq}(K) \\ C \in \mathcal{M}_{qr}(K) \end{array} \right.$ alors $(AB)C = A(BC)$

D4 (par les applications linéaires, et par le calcul).

β) "Distributivité".

PROP : si $\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{c} A\in\mathcal{M}_{np}(K) \\ B,C\in\mathcal{M}_{pq}(K)\end{array}\right. \text{ alors } A(B+C)=AB+AC \\ \left\{\begin{array}{c} A,B\in\mathcal{M}_{np}(K) \\ C\in\mathcal{M}_{pq}(K)\end{array}\right. \text{ alors } (A+B)C=AC+BC\end{array}\right.$

D5 (par les applications linéaires, et par le calcul).

γ) Relations avec la multiplication externe .

PROP : si $\left\{\begin{array}{c} A\in M_{np}(K), B\in M_{pq}(K) \\ \lambda\in K\end{array}\right. \quad A(\lambda B)=(\lambda A)B=\lambda AB$

COROLLAIRE : $(\mathcal{M}_n(K),+,.(\text{int.}))$ est un anneau. Cet anneau n'est ni intègre, ni commutatif dès que $n\geqslant 2$; de plus, la bijection $\left\{\begin{array}{c} \text{..........} \to \text{..........} \\ \text{..........} \mapsto \text{..........}\end{array}\right.$ est un isomorphisme d'anneaux.

D6

III) EXPRESSION MATRICIELLE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE.

PROP : données :
E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions finies n et p,
$\mathcal{B}=(\overrightarrow{e_1},...,\overrightarrow{e_n})$ base de E, $\mathcal{C}=\left(\overrightarrow{f_1},...,\overrightarrow{f_p}\right)$ base de F,
$f\in L(E,F), A=(a_{ij})=\text{mat}_{(\mathcal{B},\mathcal{C})}(f)\in M_{pn}(K)$,
$\overrightarrow{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\overrightarrow{e_i}\in E, X=\begin{bmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n\end{bmatrix}$, matrice colonne des coordonnées de $\overrightarrow{x}$ dans $\mathcal{B}$
$\overrightarrow{y}=\sum_{i=1}^{p}y_i\overrightarrow{f_i}\in F$, $Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ ... \\ y_p\end{bmatrix}$, matrice colonne des coordonnées de $\overrightarrow{y}$ dans $\mathcal{C}$. Alors :

$$\boxed{\overrightarrow{y}=f(\overrightarrow{x})\Leftrightarrow Y=AX}$$

D7
E4

DEF : si $A\in\mathcal{M}_{np}(K)$, l'*application linéaire canonique* associée à A est l'application :

$$f_A:\left\{\begin{array}{c}\mathcal{M}_{p1}(K)(\approx K^p)\to\mathcal{M}_{n1}(K)(\approx K^n) \\ X\mapsto AX\end{array}\right.$$

PROP : la matrice canonique de f_A est la matrice A.
D8
CORO : si A et $B\in\mathcal{M}_{np}(K)$, alors

$$(\forall X\in\mathcal{M}_{p1}(K)\quad AX=BX)\Rightarrow A=B$$

D9

REM 1 : bien noter le $\forall X$; si $AX=BX$ pour une seule X, même non nulle, on ne peut pas en déduire $A=B$.

REM 2 : on a également la relation : $f_{AB}=f_A\circ f_B$.

PROP : soit $A\in\mathcal{M}_{np}(K)$ dont les colonnes sont $C_1,...,C_p$; alors

1.	$\begin{bmatrix} x_1 \\ ... \\ x_p\end{bmatrix}\in\ker f_A\Leftrightarrow x_1C_1+...+x_pC_p=\begin{bmatrix} 0 \\ ... \\ 0\end{bmatrix}$
2.	$\text{Im} f_A=\text{Vect}(C_1,...,C_p)$

D10

IV) MATRICES CARRÉES INVERSIBLES.

1) Définitions.

LEMME : si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux anneaux isomorphes, alors le groupe des éléments inversibles de $\mathcal{A}$ est isomorphe au groupe des éléments inversibles de $\mathcal{B}$.

D11

DEF : une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est dite *inversible* si c'est un élément inversible de l'anneau $\mathcal{M}_n(K)$, autrement dit s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que

$$AB = BA = I_n$$

B est notée A^{-1}.

PROP et DEF : si E est un espace vectoriel de dimension n, l'ensemble des matrices carrées d'ordre n inversibles à coefficients dans K est un groupe multiplicatif isomorphe à $(GL(E), \circ)$. Il est appelé "groupe linéaire en dimension n" et noté $GL_n(K)$.

D12

REM 1 : si $f \in L(E)$, on a donc

$$f \in GL(E) \Leftrightarrow mat_{\mathcal{B}}(f) \in GL_n(K)$$

, et si $A \in M_n(K)$,

$$A \in GL_n(K) \Leftrightarrow f_A \in GL(K^n)$$

REM 2 : $GL_1(K) = K^*$.

REM 3 : rappelons qu'un élément "régulier" (ou "simplifiable") de l'anneau $\mathcal{M}_n(K)$ est une matrice A vérifiant :

$$\forall B, C \in \mathcal{M}_n(K) \quad AB = AC \Rightarrow B = C \text{ et } BA = CA \Rightarrow B = C$$

On sait qu'un élément inversible est toujours régulier, mais il se trouve que dans le cas des matrices, la réciproque est vraie (preuve dans l'exercice 17 sur les matrices) ; ceci explique pourquoi une matrice inversible est parfois appelée matrice "régulière".

2) Cas $n = 2$

PROP : $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ est inversible ssi $ad \neq bc$ et $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

D13

Exemple : $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} ...... & .... \\ ...... & .... \end{bmatrix}$

3) Méthode d'inversion d'une matrice par la résolution d'un système.

LEMME : soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$; alors s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n1}(K) \quad AX = Y \Leftrightarrow X = BY$$

alors A est inversible d'inverse B.

D14

En pratique, on résout donc le système d'inconnues $x_1, ..., x_n$ et de paramètres $y_1, ..., y_n$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ ... & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ ... \\ .. \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ ... \\ ... \\ y_n \end{bmatrix}$$

Si le système est "de Cramer", la matrice est inversible et l'expression des solutions :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2n} \\ \dots & & & \\ b_{n1} & & & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ \\ y_n \end{bmatrix}$$

donne la matrice inverse.

E5 : inverser $\begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

V) CHANGEMENTS DE BASES.

1) Matrice de passage d'une base à une autre.

a) Définition.

DEF : la *matrice de passage* d'une base (dite "ancienne base") à une autre (dite "nouvelle base") est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base dans l'ancienne :

si E K-espace vectoriel de dimension finie n,

$\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ et $\mathcal{B}' = \left(\overrightarrow{e'_1}, ..., \overrightarrow{e'_n}\right)$ bases de E, $\overrightarrow{e'_j} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} \overrightarrow{e_i}$, alors

$$P_{(\mathcal{B},\mathcal{B}')} = (p_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \overrightarrow{e'_1} & \dots\dots\dots & \overrightarrow{e'_j} & \dots\dots\dots & \overrightarrow{e'_n} \end{array} \\ \begin{bmatrix} & & p_{1j} & & \\ & & \dots & & \\ p_{i1} & \dots\dots\dots & p_{ij} & \dots\dots\dots & p_{in} \\ & & \dots. & & \\ & & p_{nj} & & \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \overrightarrow{e_1} \\ \dots \\ \overrightarrow{e_i} \\ \dots \\ \overrightarrow{e_n} \end{array}$$

REM : la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ n'est autre que la matrice de l'identité de E relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$ (bien noter l'interversion) :

$$P_{(\mathcal{B},\mathcal{B}')} = \text{mat }_{(\mathcal{B}',\mathcal{B})} (id_E)$$

b) Propriétés.

PROP :

1. $P_{(\mathcal{B},\mathcal{B}'')} = P_{(\mathcal{B},\mathcal{B}')} \times P_{(\mathcal{B}',\mathcal{B}'')}$ (relation de Chasles)
2. $P_{(\mathcal{B},\mathcal{B})} = I_n$
3. $P_{(\mathcal{B},\mathcal{B}')} \in GL_n(K)$ (une matrice de passage est toujours inversible)
4. $\left(P_{(\mathcal{B},\mathcal{B}')}\right)^{-1} = P_{(\mathcal{B}',\mathcal{B})}$

D15

E6

2) Action d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur.

PROP : données :

$\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ et $\mathcal{B}' = \left(\overrightarrow{e'_1}, ..., \overrightarrow{e'_n}\right)$ bases de E, $P = P_{(\mathcal{B},\mathcal{B}')}$,

$\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e_i} = \sum_{i=1}^{n} x'_i \overrightarrow{e'_i} \in E, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ et $X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{bmatrix}$ matrices colonne des coordonnées de $\overrightarrow{x}$ dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Alors :

$$\boxed{X = PX'}$$

D16

REM : alors que dans P on a les coordonnées de la nouvelle base dans l'ancienne, la relation $X = PX'$ permet d'avoir les coordonnées anciennes d'un vecteur en fonction des nouvelles. Ce phénomène s'appelle la "contravariance".

Il n'est en fait pas gênant car il permet de passer d'une équation cartésienne $f(x_1, ..., x_n) = 0$ dans l'ancienne base à la nouvelle équation cartésienne $g(x'_1, ..., x'_n) = 0$.

E7

3) Action d'un changement de bases sur la matrice d'une application linéaire.

PROP : données
$f \in L(E, F)$
$\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ et $\mathcal{B}' = \left(\overrightarrow{e'_1}, ..., \overrightarrow{e'_n}\right)$ bases de E, $P = P_{(\mathcal{B},\mathcal{B}')}$
$\mathcal{C} = \left(\overrightarrow{f_1}, ..., \overrightarrow{f_p}\right)$ et $\mathcal{C}' = \left(\overrightarrow{f'_1}, ..., \overrightarrow{f'_p}\right)$ bases de F, $Q = P_{(\mathcal{C},\mathcal{C}')}$
$A = \mathrm{mat}_{(\mathcal{B},\mathcal{C})}(f)$, $A' = \mathrm{mat}_{(\mathcal{B}',\mathcal{C}')}(f)$

Alors (relation à bien connaître) :

$$\boxed{A' = Q^{-1}AP}$$

D17
E8

VI) TRANSPOSITION DES MATRICES.

a) Définition.

DEF : la *transposée* d'une matrice est la matrice dont les lignes ont pour coordonnées les coordonnées des colonnes de la matrice de départ (ou l'inverse) :
si $A \in \mathcal{M}_{np}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{pn}(K)$,

$$B = {}^tA \text{ ou } A^T \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall i \in [|1, p|] \ \forall j \in [|1, n|] \quad B(i, j) = A(j, i)$$

b) Propriétés.

PROP :

1. ${}^t({}^tA) = A$
2. ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB \ \forall A, B \in \mathcal{M}_{np}(K)$
3. ${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA \quad \forall A \in \mathcal{M}_{np}(K) \ \forall \lambda \in K$ (linéarité de la transposition)
4. ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA \quad \forall A \in \mathcal{M}_{np}(K) \quad \forall B \in \mathcal{M}_{pq}(K)$
5. si $A \in GL_n(K)$ ${}^tA$ également, et $({}^tA)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$ (notée ${}^tA^{-1}$)

D18

c) Matrices carrées symétriques et antisymétriques.

DEF : une matrice carrée est dite $\left\{\begin{array}{l}\text{symétrique}\\ \text{antisymétrique}\end{array}\right.$ si elle est $\left\{\begin{array}{l}\text{égale à}\\ \text{égale à l'opposé de}\end{array}\right.$ sa transposée :

$$A \in \mathcal{M}_n(K) \text{ est } \left\{\begin{array}{l}\text{symétrique}\\ \text{antisymétrique}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}{}^tA = A\\ {}^tA = -A\end{array}\right. \Leftrightarrow \forall i, j \in [|1, n|] \left\{\begin{array}{l}A(j, i) = A(i, j)\\ A(j, i) = -A(i, j)\end{array}\right.$$

Notations :

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{S}_n(K) & = & \left\{A \in \mathcal{M}_n(K) \ / \ {}^tA = A\right\}\\ \mathcal{A}_n(K) & = & \left\{A \in \mathcal{M}_n(K) \ / \ {}^tA = -A\right\}\end{array}$$

PROP :

1. $\mathcal{S}_n(K)$ et $\mathcal{A}_n(K)$ sont des sev de $\mathcal{M}_n(K)$
2. Toute matrice carrée est de façon unique la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

D19
REM : 2. se traduit par ....

PROP : dim $\mathcal{S}_n(K) =$ ...., dim $\mathcal{A}_n(K) =$ ....
D20

VII) TRACE D'UNE MATRICE CARRÉE, D'UN ENDOMORPHISME.
1) Définition.

DEF : la *trace* d'une matrice carrée est la somme de ses éléments diagonaux :

$$\boxed{\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A(i,i)}$$

2) Propriétés.

PROP :

1. $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B \quad \forall A, B \in M_n(K)$
2. $\operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr} A \quad \forall A \in M_n(K) \quad \forall \lambda \in K$ (linéarité de la trace)
3. $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) \quad \forall A, B \in M_n(K)$

D21

PROP et DEF : toute les matrices d'un même endomorphisme ont la même trace, qui est par définition la *trace* de cet endomorphisme.

$$\forall f \in L(E) \ \forall B, B' \text{ bases de } E \quad \operatorname{tr}(\operatorname{mat}_B(f)) = \operatorname{tr}(\operatorname{mat}_{B'}(f)) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{tr} f$$

D22

REM : la trace permet donc de repérer rapidement une erreur lors d'un changement de base.

VIII) RANG D'UNE MATRICE.
a) Matrice d'une famille finie de vecteurs dans une base.

DEF : la *matrice* d'une famille finie de vecteurs dans une base est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la famille dans cette base :
si E K-espace vectoriel de dimension finie n,
$\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ base de E et $\mathcal{F} = (\overrightarrow{x_1}, ..., \overrightarrow{x_p})$ famille de vecteurs de E, $\overrightarrow{x_j} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \overrightarrow{e_i}$, alors

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \overrightarrow{x_1} & \cdots\cdots & \overrightarrow{x_j} & \cdots\cdots & \overrightarrow{x_p} \end{array} \\ \begin{bmatrix} & & a_{1j} & & \\ & & \cdots & & \\ a_{i1} & \cdots\cdots & a_{ij} & \cdots\cdots & a_{ip} \\ & & \cdots & & \\ & & a_{nj} & & \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \overrightarrow{e_1} \\ \cdots \\ \overrightarrow{e_i} \\ \cdots \\ \overrightarrow{e_n} \end{array}$$

REM : le rang de la famille $\mathcal{F}$ (i.e. la dimension de l'espace qu'elle engendre) est aussi le rang de la famille des colonnes de $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{F}$.

b) Définition du rang d'une matrice.

DEF : le rang d'une matrice de format (n,p) est le rang (dans $M_{n1}(K)$) de la famille de ses colonnes :

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(C_1, ...C_p) \text{ où } C_j = \begin{bmatrix} A(1,j) \\ . \\ . \\ A(n,j) \end{bmatrix}$$

REM : d'après la remarque ci-dessus, toutes les matrices d'une même famille de vecteurs (dans des bases quelconques) ont pour rang le rang de cette famille.
PROP : toutes les matrices d'une même application linéaire ont pour rang le rang de cette application linéaire.
D23

c) Propriétés.

PROP : soit $A \in \mathcal{M}_{np}(K)$, $A = \text{mat}_{(\mathcal{B},\mathcal{C})}(f)$; alors

1. $\text{rg}(A) \leqslant \min(n,p)$
2. $\text{rg}(A) = n \Leftrightarrow f$ est surjective
3. $\text{rg}(A) = p \Leftrightarrow f$ est injective

COROLLAIRE (diverses caractérisations de l'inversibilité d'une matrice carrée) : soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $A = \text{mat}_{(\mathcal{B},\mathcal{C})}(f)$
A est inversible si et seulement si

1. $\exists B \in \mathcal{M}_n(K) \quad AB = BA = I_n$ (c'est la définition)
2. f est bijective ($\Leftrightarrow$ f est injective)
3. $\text{rg}(A) = n$

D24

IX) MATRICES ÉQUIVALENTES.

DEF : deux matrices sont dites équivalentes si ce sont les matrices de la même application linéaire (elles ont donc forcément le même format) : si $A, A' \in \mathcal{M}_{np}(K)$

$$A \text{ eq } A' \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists E \text{ de dimension } p, \exists \mathcal{B}, \mathcal{B}' \text{ bases de } E \\ \exists F \text{ de dimension } n, \exists \mathcal{C}, \mathcal{C}' \text{ bases de } F \end{array} \right. \quad / \left\{ \begin{array}{l} A = \text{mat}_{(\mathcal{B},\mathcal{C})}(f) \\ A' = \text{mat}_{(\mathcal{B}',\mathcal{C}')}(f) \end{array} \right.$$

PROP 1 : si $A, A' \in \mathcal{M}_{np}(K)$

$$A \text{ eq } A' \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists P \in GL_{.....}(K) \\ \exists Q \in GL_{.....}(K) \end{array} \right. \quad / \ A' = Q^{-1}AP$$

D25

PROP 2 : comme son nom l'indique, la relation d'équivalence des matrices est une relation d'équivalence dans $\mathcal{M}_{np}(K)$.

D26

Deux matrices équivalentes ont forcément le même rang, comme matrices de la même application linéaire ; nous allons voir qu'en fait la réciproque est vraie.

LEMME 1 : pour r entier $\leqslant \min(n,p)$, notons J_{npr} la matrice I_r complétée à droite et à gauche par des 0 :

$$J_{npr} = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{bmatrix}$$

alors toute matrice $A \in \mathcal{M}_{np}(K)$ de rang r est équivalente à J_{npr}.
D27

THÉORÈME 1 : deux matrices de même format sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.
D28

REM : il y a donc .... classes de matrices équivalentes dans $\mathcal{M}_{np}(K)$.

LEMME 2 : si deux matrices sont équivalentes leurs transposées le sont également.
D29

Ceci va nous permettre d'établir le théorème extrêment important suivant :
THÉORÈME 2 : une matrice a même rang que sa transposée :

$$\operatorname{rg}\left({}^tA\right) = \operatorname{rg} A$$

D30

COROLLAIRE : le rang des lignes d'une matrice est égal au rang de ses colonnes :

si $A \in M_{np}(K)$, $L_i = \begin{bmatrix} A(i,1) & ... & A(i,p) \end{bmatrix}, C_j = \begin{bmatrix} A(1,j) \\ . \\ . \\ A(n,j) \end{bmatrix}$, alors

$$\boxed{\operatorname{rg}(L_1, ..., L_n) = \operatorname{rg}(C_1, ..., C_p)}$$

Ceci permet donc d'écrire par exemple :

$$\operatorname{rg}((1,-1,2,0),(1,4,-1,2)) = \operatorname{rg}\begin{bmatrix} .. & .. \\ .. & .. \\ .. & .. \\ .. & .. \end{bmatrix} = \operatorname{rg}\begin{bmatrix} .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. \end{bmatrix} = \operatorname{rg}((..,..),(..,..),(..,..),(..,..))$$

REM : ceci permet de simplifier la recherche du rang d'une famille de vecteurs en raisonnant à la fois sur les lignes et les colonnes.
E9 : $rg((1,0,3,4,0),(-1,4,3,8,3),(3,-4,3,0,-3),(0,4,6,12,3))$.

X) Application à la caractérisation du rang par matrice carrée extraite.

DEF : Une matrice est dite "extraite" d'une autre si elle est obtenue en barrant un certain nombre de lignes et de colonnes dans la matrice de départ.

THEOREME 3 : le rang d'une matrice est l'ordre maximal d'une matrice carrée extraite inversible.

D31