PROBLÈME SUR LES OVALES DE DESCARTES

R. FERREOL

I PRÉLIMINAIRES

I.1 Orthogonal large.

E désigne un espace vectoriel euclidien ; le produit scalaire de x et y est noté $(x|y)$.

Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel E.

1) a) Montrer qu'il existe une unique application g de E dans E telle que :
$\forall x, y \in \mathrm{E} \quad (g(x)|\,y) = (x|f(y))$.

1) b) Montrer que g est linéaire et que sa matrice dans une base orthonormée est la transposée de celle de f ; g sera notée ${}^t f$.

Pour x élément de E, on désigne par $x^\perp$ l'orthogonal de x, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs orthogonaux à x.

Pour X partie de E, on désigne par X^* »l'orthogonal large » de X, défini par $\mathrm{X}^* = \bigcup_{x \in X} x^\perp$ (on rappelle que l'orthogonal de X au sens habituel est $X^\perp = \bigcap_{x \in X} x^\perp$).

2) Montrer que $(f(X))^* = ({}^t f)^{-1}(X^*)$ (où $({}^t f)^{-1}(X^*)$ désigne l'image réciproque de X^* par ${}^t f$).

3) Soit n un entier ≥ 2 et considérons la partie $X_n = (\mathbb{R}_+)^n \setminus \{(0,\ldots,0)\}$ de $\mathbb{R}^n$.

Montrer que $\mathrm{X}_\mathrm{n}^* = \mathbb{R}^n \setminus (\mathrm{Y}_n \cup (-\mathrm{Y}_n))$, où l'on a posé $\mathrm{Y}_\mathrm{n} = (\mathbb{R}_+^*)^n$.

4) On désigne par T l'ensemble des triplets (x, y, z) non nuls de $\mathbb{R}^3$ tels que :

$$\begin{cases} x \leq y + z \\ y \leq x + z \\ z \leq x + y \end{cases}$$

4) a) Déterminer un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{T} = f^{-1}(\mathrm{X}_3)$.

4) b) En déduire que (x, y, z) appartient à T^* si et seulement si les réels $x + y, y + z, z + x$ ne sont pas de même signe au sens strict.

I.2. Inversions.

On adjoint à un plan euclidien orienté P un point à l'infini Ω ; l'ensemble $\overline{\mathrm{P}} = \mathrm{P} \cup \{\Omega\}$ est appelé plan inversif.

Étant donnés un réel $\alpha > 0$ et un point F de P, considérons l'application f de $\overline{\mathrm{P}}$ dans lui-même, inversion de pôle F et de puissance α, qui à tout point M de $\mathrm{P} \setminus \{\mathrm{F}\}$ associe le point M' de la droite (FM) vérifiant $\overline{\mathrm{FM}}.\overline{\mathrm{FM}'} = \alpha$, et qui échange les points F et Ω.

1) Montrer que f est bijective et que l'ensemble des points fixes de f forme un cercle (appelé cercle d'inversion).

2) Une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ de P étant choisie, on associe à tout point M de P son affixe $z = x + iy$, de sorte que $\overrightarrow{FM} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Montrer que si M, d'affixe z, appartient à $P \setminus \{F\}$, l'affixe de $M' = f(M)$ est $z' = \frac{\alpha}{\bar{z}}$.

3) Soient A et M deux points de $P \setminus \{F\}$, A', M' leurs images par f ; montrer que :

$$M'A' = \frac{\alpha}{FA}\frac{MA}{MF}.$$

II COORDONNÉES BIPOLAIRES ET OVALES DE DESCARTES.

On fixe deux points distincts F et G de P.

Soit M un point de $\overline{P}$, et x, y, z trois réels ≥ 0 ; on dit que (x, y, z) est un triplet de coordonnées bipolaires de M dans le repère (F,G) si les conditions suivantes sont réalisées :

$$\begin{cases} 1.\ \text{si } z \neq 0 \text{ alors } M \neq \Omega \text{ et } \dfrac{MF}{FG} = \dfrac{x}{z}, \dfrac{MG}{FG} = \dfrac{y}{z} \\ 2.\ \text{si } z = 0 \text{ alors } M = \Omega \text{ et } x = y > 0 \end{cases}$$

1) a) Vérifier que tout point de $\overline{P}$ possède un triplet de coordonnées bipolaires et montrer que (x, y, z) est un triplet de coordonnées bipolaires d'un point de $\overline{P}$ si et seulement si $(x,y,z) \in T$ (T a été défini en I.1 4)) ; si $(x,y,z) \in T$, $z \neq 0$, combien y a-t-il de points M de coordonnées bipolaires (x, y, z)?

1) b) Si (x, y, z) est un triplet de coordonnées bipolaires de $M \in P$, à quelle condition nécessaire et suffisante (x', y', z') en est-il un autre ?

Soient α, β, γ trois réels non tous nuls ; on désigne par $\overline{O}_{(\alpha,\beta,\gamma)}$ l'ensemble des points du plan inversif dont un système de coordonnées bipolaires (x, y, z) vérifie $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$; on pose : $O_{(\alpha,\beta,\gamma)} = \overline{O}_{(\alpha,\beta,\gamma)} \cap P$.

2) a) Que dire de $\overline{O}_{(\alpha,\beta,\gamma)}$ si on multiplie (α,β,γ) par une constante non nulle ?

2) b) Vérifier que $O_{(\alpha,\beta,\gamma)} = \{M \in P \,/\, \alpha MF + \beta MG = -\gamma FG\}$.

3) a) Montrer que $\overline{O}_{(\alpha,\beta,\gamma)}$ est non vide si et seulement si $(\alpha,\beta,\gamma) \in T^*$ (rappelons que T^* a été déterminé dans I.1.4) b)).

3) b) En déduire que si α, β, γ ont des valeurs absolues distinctes, $\overline{O}_{(\alpha,\beta,\gamma)}$ est non vide si et seulement si parmi α, β, γ, les deux réels ayant la plus grande valeur absolue sont de signes contraires.

4) On dit que s est une similitude de $\overline{P}$ si la restriction de s à P est une similitude de P et si $s(\Omega) = \Omega$.

Considérons une similitude s de $\overline{P}$;

4) a) Montrer que si (x,y,z) est un triplet de coordonnées de $M \in \overline{P}$ dans le repère (F, G), (x,y,z) est aussi un triplet de coordonnées de s(M) dans le repère (s(F), s(G)).
4) b) En déduire une équation bipolaire de $s\left(\overline{O}_{(\alpha,\beta,\gamma)}\right)$ dans le repère (s(F), s(G)) ; déterminer par exemple $s\left(\overline{O}_{(\alpha,\beta,\gamma)}\right)$ quand s est la symétrie orthogonale d'axe (FG), ou d'axe la médiatrice de [FG].

5) a) Soit f l'inversion de pôle F et de puissance FG^2 ; montrer que si (x,y,z) est un triplet de coordonnées bipolaires de M dans (F,G), alors (z,y,x) est un triplet de coordonnées bipolaires de M' = f(M) dans (F,G).
5) b) En déduire $f\left(\overline{O}_{(\alpha,\beta,\gamma)}\right)$.

III CAS LIMITES : CONIQUES ET LIMAÇONS.
1) a) Montrer que $\Omega \in \overline{O}_{(\alpha,\beta,\gamma)} \Leftrightarrow \alpha+\beta=0$.
1) b) Déterminer la nature des ovales $O_{(\alpha,-\alpha,\gamma)}$.

2) Déterminer la nature des ovales $O_{(\alpha,\alpha,\gamma)}$.

Pour les questions 3) et 4), on pose FG = 2c, et P est rapporté au repère orthonormé direct $\left(F,\vec{i},\vec{j}\right)$ tel que $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{GF}}{GF}$.

3) On considère un réel $a > c$;
3) a) Montrer que $O_{(c,c,-a)}$ a pour équation polaire $\rho = \dfrac{a^2-c^2}{a+c\cos\theta}$.
3) b) En déduire que $O_{(a,-c,-c)}$ est le limaçon de Pascal d'équation polaire $\rho = \dfrac{4c^2}{a^2-c^2}(a+c\cos\theta)$.

3) c) Tracer dans une même figure $O_{(c,c,-a)}$ et $O_{(a,-c,-c)}$, ainsi que le cercle d'inversion de l'inversion échangeant ces deux courbes, pour c = 2, et a = 3.

4) On considère un réel $a < c$
4) a) Montrer que $O_{(c,-c,a)} \cup O_{(c,-c,-a)}$ a pour équation polaire $\rho = \dfrac{c^2-a^2}{a+c\cos\theta}$.
4) b) En déduire $O_{(a,-c,c)} \cup O_{(a,c,-c)}$.

IV TROISIÈME FOYER DES OVALES DE DESCARTES.
1) Soient F, G, H trois points alignés de P, et M un autre point de P.
1) a) Montrer que $\overline{OH}.\overrightarrow{MF} + \overline{HF}.\overrightarrow{MG} + \overline{FG}.\overrightarrow{MH} = \vec{0}$
1) b) En déduire la formule de Stewart :

$$\overline{OH}.MF^2 + \overline{HF}.MG^2 + \overline{FG}.MH^2 + \overline{FG}.\overline{GH}.\overline{HF} = 0.$$

2) Soient u, v, w trois réels de valeurs absolues distinctes (non nulles ?) ; on considère dans $\mathbb{R}^3$ l'hyperboloïde H d'équation :

$$\left(w^2-v^2\right)x^2 + \left(u^2-w^2\right)y^2 + \left(v^2-u^2\right)z^2 + \left(w^2-v^2\right)\left(u^2-w^2\right)\left(v^2-u^2\right) = 0 \;;$$

2) a) Montrer que la droite D passant par le point $(\mathrm{vw}, \mathrm{wu}, \mathrm{uv})$ et dirigée par le vecteur $(\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w})$ est incluse dans H.

2) b) En déduire que si (x, y, z), avec x, y, $z \geq 0$, appartient à H et vérifie l'une des relations :

$$\begin{cases} uy - vx = w(u^2 - v^2) & (1) \\ vz - wy = u(v^2 - w^2) & (2) \\ wx - uz = v(w^2 - u^2) & (3) \end{cases}$$

alors il vérifie les deux autres.

3) Soient O, F, G, H trois points alignés dans P vérifiant : $\overline{\mathrm{OF}} = u^2, \overline{\mathrm{OG}} = v^2, \overline{\mathrm{OH}} = w^2$, où u, v, w sont trois réels de valeurs absolues distinctes, et Ω l'ensemble des points M de P vérifiant : $u\mathrm{MG} - v\mathrm{MF} = w(u^2 - v^2)$.

3) a) Vérifier que Ω est l'ovale de Descartes $\mathrm{O}_{(-v,u,w.signe((|v|-|u|))}$.

3) b) Montrer que Ω est également l'ensemble des points M de P vérifiant : $v\mathrm{MH} - w\mathrm{MF} = u(v^2 - w^2)$, ainsi que l'ensemble des points M de P vérifiant : $w\mathrm{MF} - u\mathrm{MH} = v(w^2 - u^2)$.

4) Étude d'un exemple.

Soit $\Omega = O_{(1,2,-4)}$, ensemble des points M de P vérifiant : $2\mathrm{MF} + \mathrm{MG} = 3\mathrm{FG}$.

4) a) Déterminer la distance FG, des entiers u, v, w, un point O et un point H de sorte que Ω soit identique à l'ensemble Ω de la question 3) ; en déduire deux autres caractérisations de Ω, de la forme $\begin{cases} \alpha\mathrm{MG} + \beta\mathrm{MH} = \gamma\mathrm{GH} \\ \alpha'\mathrm{MH} + \beta'\mathrm{MF} = \gamma'\mathrm{HF} \end{cases}$.

4) b) Tracer cette courbe.

5) Montrer que si à partir d'un triplet (α, β, γ) de réels de valeurs absolues distinctes, on construit les 48 triplets obtenus en permutant α, β, γ et en les changeant de signes, il n'existe, à similitude près, que deux ovales de Descartes non vides ayant pour indice l'un de ces triplets.