COMPLÉMENTS SUR LES VARIABLES ALÉATOIRES

1) Lois de probabilité finies usuelles.

a) Les 3 lois au programme.

Nom de la loi	Notation	paramètres	loi de probabilité	Espérance	Variance
loi uniforme	$\mathcal{U}(a,b)$	$a \leqslant b \in \mathbb{N}^*$	$P(X=k) = \frac{1}{n}, a \leqslant k \leqslant b,\ n = b-a+1$	....	....
loi de Bernoulli	$\mathcal{B}(p)$	$p \in [0,1]$ $q = 1-p$	$P(X=1) = p$ $P(X=0) = q$		
loi binomiale	$\mathcal{B}(n,p)$	$n \in \mathbb{N}^*$ $p \in [0,1]$ $q = 1-p$	$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, 0 \leqslant k \leqslant n$		

Notation : pour dire que la variable X suit la loi de Bernouilli de paramètre p on écrit : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Calcul de l'espérance et de la variance.

D1

Obtention de ces différentes lois :

- la loi uniforme : jet d'un dé non pipé, tirage d'une boule parmi n boules numérotées de 1 à n, boules indiscernables au toucher.

- la loi de Bernoulli : jet d'une pièce non équilibrée, tirage d'une boule dans une urne contenant N boules dont pN sont d'un type, et qN d'un autre, tout phénomène aléatoire avec deux issues : succès, échec ("expérience de Bernoulli").
Si A est un évènement quelconque, alors X_A suit une loi de Bernoulli $B(P(A))$.

- la loi binomiale : répétition de n expériences de Bernoulli, identiques et indépendantes, concrètement : loi du tirage *avec remise* de n boules dans une urne contenant N boules dont pN sont d'un type, et qN d'un autre.

b) La loi hypergéométrique (hors programme).

Notation	paramètres	loi de probabilité	Espérance	Variance
$\mathcal{H}(N,n,p)$	$n, N \in \mathbb{N}$ $p \in [0,1], q = 1-p$ Np, Nq entiers	$P(X=k) = \dfrac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}, 0 \leqslant k \leqslant n$	np	$npq\dfrac{N-n}{N-1}$

Loi du tirage *simultané* de n boules dans une urne contenant N boules dont pN sont d'un type, et qN d'un autre.

REM : le calcul de l'espérance et de la variance de la loi hypergéométrique constituent d'excellents exercices !

2) Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

PROP : soit X une variable aléatoire positive. On a alors, pour $a > 0$:

$$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a} \text{ (inégalité de Markov)}$$

D1 : $E(X) = \sum_k x_k P(X = x_k) \geqslant \sum_{x_k \geqslant a} x_k P(X = x_k) \geqslant \sum_{x_k \geqslant a} a P(X = x_k) = aP(X \geqslant a)$.

REM : on écrit parfois cette inégalité sous la forme :

$$P(X \geqslant km) \leqslant \frac{1}{k} (\text{où } m = E(X))$$

Cela donne donc un majorant de la probabilité qu'une variable dépasse k fois son espérance.
En particulier, il y a moins de 50% de chances qu'une variable double son espérance.

PROP : soit X une variable aléatoire réelle d'espérance m. On a alors, pour $\varepsilon > 0$:

$$P(|X-m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2} \text{ (inégalité de Bienaymé-Tchebychev)}$$

D2 : d'après Markov, $P\left(|X-m|^2 \geqslant \varepsilon^2\right) \leqslant \dfrac{E\left((X-m)^2\right)}{\varepsilon^2} = \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$.

REM : on aurait aussi $P(|X-m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{\text{écart moyen}}{\varepsilon}$.

3) Couples de variables aléatoires. Indépendance.

Soient X et Y deux var définies sur un même univers Ω ; (X,Y) : s'appelle un *couple aléatoire.*

DEF : l'application $p_{X,Y}$ définie sur l'univers image $(X,Y)(\Omega) = \{x_1,...,x_p\} \times \{y_1,...,y_q\}$ qui à (x_i,y_j) fait correspondre $P(\{(X,Y) = (x_i,y_j)\})$s'appelle la *loi de probabilité (conjointe)* du couple (X,Y). Et on définit sur $(X,Y)(\Omega)$ la *probabilité induite par* (X,Y) : $P_{X,Y}$ par

$$P_{X,Y}(U \times V) = P(\{(X,Y) \in U \times V\})$$

Exemple : Épreuve aléatoire :
Une boite contient 6 jetons, 3 carrés : 2 verts et un bleu, et 3 ronds : 2 bleus et un vert.
L'épreuve consiste à tirer deux jetons simultanément.
Univers : $\Omega = \texttt{ensembl}$e des paires de jetons, avec équiprobabilité ($|\Omega| = ... = ...$).
Variables aléatoires : $C =$ nombre de jetons carrés , $V =$ nombre de jetons verts.
Univers image : $(C,V)(\Omega) \subset \{0,1,2\}^2$.
La loi de probabilité de (C,V) est présentée dans le tableau :

$C\backslash V$	0	1	2	loi de C
0			0	
1				
2				
loi de V				

DEF : deux variables aléatoires X et Y sont dites indépendantes si tous les évènements élémentaires $\{X = x_i\}$ liés à X sont indépendants de tous les évènements élémentaires $\{Y = y_j\}$ liés à Y, autrement dit si

$$P((X,Y) = (x_i,y_j)) = P(X = x_i)\,P(Y = y_j)$$

Exemple : les fonctions caractéristiques X_A et X_B sont indépendantes ssi A et B sont indépendants.
D3

PROP : si X et Y sont indépendantes, tous les évènements liés à X sont indépendants de tous les évènements liés à Y, autrement dit pour tout $U \subset X(\Omega)$ et tout $V \subset X(\Omega)$:

$$P((X,Y) \in U \times V) = P(X \in U)\,P(Y \in V)$$

D4

4) Covariance.

DEF : la *covariance* de deux variables aléatoires réelles X et Y est le réel (moyenne du produit des écarts à la moyenne) :

$$\text{Cov}(X,Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

Lorsque la covariance est nulle, on dit que les variables sont "*non corrélées*".

REM : $V(X) = \text{Cov}(X, X)$.

PROP 1 : $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ (Formule de Koenig-Huygens)
D5

Exemple : $\text{Cov}(X_A, X_B) = P(A \cap B) - P(A)P(B)$.

D6

PROP 2 : la covariance est une forme bilinéaire symétrique positive sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{P(\Omega)}$ et c'est même un produit scalaire sur le sous-espace vectoriel des variables aléatoires centrées.

D7

On en déduit :
CORO : $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X,Y)$

CORO du CORO (théorème de "Pythagore"):

2 variables aléatoires sont non corrélées ssi la variance de leur somme est égale à la somme de leurs variances.

CORO du CORO du CORO : si $X_1, ..., X_n$ sont des variables aléatoires deux à deux non corrélées

$$\boxed{V(X_1 + ... + X_n) = V(X_1) + ... + V(X_n)}$$

D8

REM : l'inégalité de Cauchy-Schwarz est valable pour toute forme bilinéaire symétrique positive (non forcément définie) ; on a donc

$$(\text{Cov}(X,Y))^2 \leqslant V(X)V(Y)$$

Par contre, on ne peut plus appliquer le cas d'égalité.

5) Covariance nulle et indépendance.

Vu que d'après la formule ci-dessus, X_A et X_B sont non corrélées ssi A et B sont indépendants, on souhaiterait bien que la non corrélation soit équivalente à l'indépendance, mais on n'a malheureusement qu'une implication :

TH : si X et Y sont indépendantes, $E(XY) = E(X)E(Y)$, d'où

$$\text{si } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes, } \text{Cov}(X,Y) = 0 \text{ et } V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

D9
REM : Deux variables indépendantes sont donc non corrélées, mais ATTENTION : la réciproque est fausse !
L'indépendance est plus forte que la non corrélation.

Exemple : Soit X une v.a. suivant la loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$; alors X et X^2 sont non corrélées, mais non indépendantes.

En effet $Cov(X, X^2) = E(XX^2) - E(X)E(X^2) =$ ....

mais $P([X=1] \cap [X^2=0]) =$ ......
tandis que : $P([X=1])P([X^2=0]) =$ ......

4) Evènements, variables aléatoires mutuellement indépendant(e)s.

DEF : Soient A_1, ... A_n des évènements.

On dit qu'ils sont *mutuellement* indépendants si pour toute sous-famille $\left(A_{i_1}, ..., A_{i_p}\right)$ avec des indices distincts, on a

$$P\left(A_{i_1} \cap .... \cap A_{i_p}\right) = P\left(A_{i_1}\right) ...P\left(A_{i_p}\right)$$

Une vérification d'indépendance mutuelle de n évènements nécessite donc de vérifier ....égalités.

ATTENTION 1 : des évènements mutuellement indépendants sont 2 à 2 indépendants MAIS LA RÉCIPROQUE EST FAUSSE !

Contre-exemple : soient A, B, C trois évènements disjoints deux à deux de probabilité $1/4$ chacun.
On vérifie que $A \cup B$, $B \cup C, C \cup A$ sont deux à deux indépendants (ce qui vient de ce que $(1/4 + 1/4)(1/4 + 1/4) = 1/4$), mais qu'ils ne sont pas mutuellement indépendants (car leur intersection est vide).

ATTENTION 2 : $P(A_1 \cap .... \cap A_n) = P(A_1) ...P(A_n)$ ne suffit pas pour que A_1, ... A_n soient indépendants.

Contre-exemple : soient A, B, C trois évènements disjoints deux à deux de probabilité a chacun et un évènement X de probabilité x disjoint des deux autres, $A' = A \cup X$, $B' = B \cup X, C' = C \cup X$.
Alors

$$P(A' \cap B' \cap C') = P(A')P(B')P(C') \text{ ssi } x = (a + x)^3 \,(1)$$

et

$$P(A' \cap B') = P(A')P(B') \quad \text{ssi } x = (a + x)^2 \,(2)$$

.
Si donc $x = (a + x)^3$ et $a + x < 1$, on a un exemple où (1) est vrai et (2) est faux.
Par exemple, $x = \dfrac{1}{2^3}$ et $a = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^3}$
D10

ATTENTION 3 :

Pour des *entiers* : "2 à 2 premiers entre eux" implique "premiers entre eux dans leur ensemble", réciproque fausse.

Pour des *évènements* ou des *sous-espaces,* "mutuellement indépendants" implique "2 à 2 indépendants", réciproque fausse.

Une indépendance mutuelle implique l'indépendance mutuelle des événements issus par complémentarisation, intersection ou réunion ; plus précisément, on a la

PROP : Soit $A_1, ..., A_n$ une famille d'évènements mutuellement indépendants. Alors :
(i) On obtient encore une famille d'évènements mutuellement indépendants si l'on remplace certains des A_i par leurs contraires.
(ii) A_1 est indépendant de tout évènement pouvant s'écrire comme réunion ou intersection des évènements $A_2, ..., A_n$ ou de leurs contraires.

D11

DEF : des variables aléatoires $(X_i)_{i=1..n}$ sont dites mutuellement indépendantes, si les évènements élémentaires $(\{X_i = cte\})_{i=1..n}$ qui leurs sont liés sont mutuellement indépendants.

PROP : on a alors l'indépendance mutuelle de tous les événements liés, soit

$$P((X_1, ..., X_n) \in A_1 \times ... \times A_n) = P(X_1 \in A_1) .....P(X_n \in A_n)$$

D12

REM : l'exemple des X_A montre que comme pour les évènements, l'indépendance deux à deux des variables aléatoires n'implique pas l'indépendance mutuelle.

5) Application à la loi binomiale.

PROP : la somme de n variables aléatoires suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

D13

Conséquence importante : si $A_1, A_2, ..., A_n$ sont n évènements indépendants de même probabilité p, la variable $X = X_{A_1} + X_{A_2} + ... + X_{A_n}$ donnant le nombre de A_i qui sont réalisés suit $\mathcal{B}(n,p)$.

Application au calcul rapide de l'espérance et de la variance de la loi binomiale :
Espérance =
Variance =

Plus généralement si $A_1, A_2, ..., A_n$ sont n évènements indépendants deux à deux de probabilités $p_1, ..., p_n$ et $X = X_{A_1} + X_{A_2} + ... + X_{A_n}$ le nombre d'événements réalisés parmi ces n évènements alors

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{n} p_k \\ V(X) &= \sum_{k=1}^{n} p_k (1-p_k) \end{aligned}$$

Encore plus généralement, si $A_1, A_2, ..., A_n$ sont n évènements indépendants deux à deux de probabilités $p_1, ..., p_n$ donnant lieu à des gains respectifs $x_1, ..., x_n$, et S le gain total,

$$\begin{aligned} E(S) &= \sum_{k=1}^{n} x_k p_k \\ V(S) &= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \, p_k (1-p_k) \end{aligned}$$