I) Vocabulaire et remarques de base.

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite complexe.

On appelle *série* de terme général u_n et on note Σu_n la suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ définie par $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$.

La *somme* de cette série est la limite éventuelle de la suite (S_n), notée $\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k$, ou $\sum_{k\geqslant n_0} u_k$.

Lorsque cette limite existe et est finie, on dit que la série est *convergente*, *divergente* dans le cas contraire.

Les termes $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ sont appelés les *sommes partielles* de la série Σu_n.

La *nature* de la série Σu_n est son caractère convergent ou divergent.

REM 1 : faire attention que

- Σu_n est une suite (et n est ici une variable muette), donc une fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{C}$
- $\sum_{k=n_0}^{n} u_k$ est un nombre (et n n'est pas muette, par contre k l'est)
- $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ est un nombre (et n est muette)

On dira par exemple "Σu_n converge" (abrégé en CV), mais " $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ existe et est finie", ces deux phrases ayant une signification équivalente.

DANS UN CALCUL, UNE MAJORATION/MINORATION, NE JAMAIS UTILISER Σu_n mais tout simplement u_n ou $\sum_{k=n_0}^{n} u_k$.

REM 2 : si on modifie un nombre fini de termes de la suite (u_n), ou si on effectue une translation d'indice, cela ne modifie pas la nature (convergente ou divergente) de la série , car on aura, APCR, $S'_n = S_n + cte$; mais cela modifiera en général la somme de la série.

Ex : Σu_n, Σu_{n-1}, et Σu_{n+1} sont de même nature, par contre Σu_n, et Σu_{2n} peuvent être de nature différente.

REM 3 : TOUTE SÉRIE EST UNE SUITE, mais aussi TOUTE SUITE EST UNE SÉRIE.

Plus précisément : les termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ sont les sommes partielles de la série de terme général v_n définie par

$$\begin{aligned} v_{n_0} &= u_{n_0} \\ v_n &= u_n - u_{n-1} \text{ pour } n \geqslant n_0 + 1 \end{aligned}$$

En conséquence

$$(u_n) \text{ et } \Sigma\,(u_n - u_{n-1}) \text{ (ou } \Sigma\,(u_{n+1} - u_n)) \text{ sont de même nature}$$

D1

Exemples E1 :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right) \text{ et } \Sigma \frac{1}{n\,(n+1)} \text{ sont de même nature}$$

$$(\ln n) \text{ et } \Sigma \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \text{ sont de même nature}$$

REM 4 : on a évidemment , si λ est un réel non nul

$$\Sigma \lambda u_n \ \text{ CV} \Longleftrightarrow \Sigma u_n \ \text{ CV}$$

On commencera donc toujours l'étude de la convergence d'une série par la simplification éventuelle d'un terme multiplicatif.

TH et DEF : Si la SÉRIE de terme général u_n est convergente, alors la SUITE (u_n) tend vers 0 MAIS LA RÉCIPROQUE EST FAUSSE.

Une série dont le terme général ne tend pas vers 0 sera dite *grossièrement divergente.*

D2

II) Exemples fondamentaux.

1) Séries géométriques.

Ce sont les séries dont le terme général est celui d'une suite géométrique.

Alors $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_{n_0} q^{k-n_0} = u_{n_0} \dfrac{1-q^{n-n_0+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$ et :

- soit $|q| \geqslant 1$ et la série diverge grossièrement
- soit $|q| < 1$ et la série converge. La somme vaut

$$\frac{u_{n_0}}{1-q}$$

En particulier

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} x^n &= ....(|x| < 1) \\
\sum_{n=1}^{+\infty} x^n &= ....(|x| < 1) \\
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^n} &= ....(|x| > 1)
\end{aligned}$$

On retrouve par exemple que $\dfrac{1}{9} = 0,111...$, d'où $1 = 0,999....$

D3

2) Séries de Riemann.

Ce sont les séries de terme général du type $\dfrac{1}{n^\alpha}$.

Elles sont grossièrement divergentes ssi ....

Par contre, dans le cas $\alpha > 0$, on a vu dans le cours sur les suites qu'elles étaient divergentes pour α.......... et convergentes pour $\alpha \geqslant 2$.

TH de convergence des séries de Riemann :

$$\Sigma \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \textit{ssi } \alpha > 1$$

Démontré plus loin deux fois.

La fonction qui à $\alpha > 1$ fait correspondre $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ s'appelle la fonction dzéta (de Riemann).

III) Séries à termes positifs (SATP), premiers critères de convergence.

Intérêt : la suite des sommes partielles d'une SATP est croissante donc possède toujours une limite, finie ou infinie.

Donc UNE SATP EST SOIT CONVERGENTE, SOIT DIVERGENTE DE SOMME INFINIE.

REM 1 : le cas d'une série à termes (tous) négatifs (APCR), se ramène à ce cas, bien sûr.

REM 2 : d'après le lemme de Césaro (exercice 11 sur les suites), si une SATP diverge (non grossièrement) vers l'infini, on a tout de même :

$$S_n << n$$

Pour déterminer la nature d'une SATP, on va comparer le terme général avec celui d'une série connue, en utilisant le

T1 : TEST DE COMPARAISON (simple) pour une SATP :

$$\text{Si, APCR, on a } u_n \leqslant v_n \text{ alors } \Sigma v_n \text{ CV} \Longrightarrow \Sigma u_n \text{ CV}$$

REM : par contraposée, on obtient

$$\text{Si, APCR, on a } u_n \leqslant v_n \text{ alors } \Sigma u_n \text{ DV} \Longrightarrow \Sigma v_n \text{ DV}$$

D4

E1 : $u_n = \dfrac{1}{(\ln n)^n}$, $u_n = \dfrac{1! + 2! + ... + n!}{(n+p)!}$ pour $p = 1$ ou 2.

On déduit du test de comparaison simple le

T'1 : TEST DE COMPARAISON par domination pour une SATP :

$$\text{Si } u_n = O(v_n) \text{ (à fortiori si } u_n = o(v_n) \text{ ,soit } u_n << v_n) \quad \Sigma v_n \text{ CV} \Longrightarrow \Sigma u_n \text{ CV}$$

D5
dont on déduit le
T2 : CRITÈRE DE L'ÉQUIVALENT pour une SATP :

$$\text{Si } u_n \sim v_n \text{ alors } \Sigma u_n \text{ CV} \Leftrightarrow \Sigma v_n \text{ CV}$$

D6

REM 1 : par contraposée, on obtient

$$\text{Si } u_n \sim v_n \text{ alors } \Sigma u_n \text{ DV} \Leftrightarrow \Sigma v_n \text{ DV}$$

REM 2 : CE CRITÈRE EST FAUX POUR DES SÉRIES DONT LE TG N'EST PAS DE SIGNE CONSTANT !!!!
Cf contre-exemple en exercice.

CONSEIL : lors de l'étude de la convergence d'une SATP, toujours commencer par chercher un équivalent simple du TG.

APPLICATIONS :
- démonstration de la divergence de la série harmonique en utilisant $\ln(n+1) - \ln n \sim \dfrac{1}{n}$
- démonstration de la convergence de $\Sigma \dfrac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha > 1$ en utilisant

$$\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right) \sim \frac{\alpha - 1}{n^\alpha}$$

D7
T"1 : TEST DE COMPARAISON FORTE pour une SATP :

$$\text{Si on a } u_n << v_n \text{ alors } \Sigma v_n \text{ CV} \Longrightarrow \Sigma u_n \text{ CV et } \Sigma u_n \text{ DV} \Longrightarrow \Sigma v_n \text{ DV}$$

En particulier

$$\text{Si } u_n \ll \frac{1}{n^\alpha} \text{avec } \alpha > 1 \text{ alors } \Sigma u_n \text{ CV}$$
$$\text{Si } u_n \gg \frac{1}{n^\alpha} \text{avec } \alpha \leqslant 1 \text{ alors } \Sigma u_n \text{ DV}$$

D8

APPLICATION aux séries de Bertrand : $\Sigma \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$

Commencer par $\Sigma \dfrac{1}{(\ln n)^{10}}$, $\Sigma \dfrac{1}{\sqrt{n} \ln n}$, $\Sigma \dfrac{(\ln n)^{10}}{n^2}$.

PROP :

$$\begin{aligned} \text{Si } \alpha &> 1 \text{ alors } \Sigma \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \text{ CV} \\ \text{Si } \alpha &< 1 \text{ alors } \Sigma \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \text{ DV} \end{aligned}$$

Le cas $\alpha = 1$ sera rêglé par une comparaison avec une intégrale.
D9
T3 (hors programme) : rêgle de D'Alembert.

Si $u_n > 0$ APCR, et $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, alors

$$\begin{aligned} \text{Si } l &> 1, \text{ alors } \lim u_n = +\infty, \text{donc } \Sigma u_n \text{ est grossièrement divergente} \\ \text{Si } l &< 1, \text{alors } \Sigma u_n \text{ est convergente.} \end{aligned}$$

ATTENTION : si $l = 1$,(cas douteux de D'alembert) on ne peut rien dire.

D10
REM : le cas douteux de D'Alembert ne l'est pas si $l = 1^+$ (autrement dit si la limite se fait par valeurs supérieures) ; en effet, la suite (u_n) est alors croissante $APCR$ et donc ne tend pas vers 0 !
APPLICATIONS aux séries du type $\Sigma \dfrac{n^\alpha}{a^n}$ $(a > 0, \alpha$ quelconque).
PROP :

$$\Sigma \frac{n^\alpha}{a^n} \text{ CV } \Leftrightarrow a < 1 \text{ ou } a = 1 \text{ et } ....$$

D11
IV) SATP : comparaison avec une intégrale.

Données : f fonction continue, positive, décroissante sur $[a, +\infty[$, $\lim\limits_{+\infty} f = 0, F$ primitive de f sur $[a, +\infty[$.
On s'intéresse à la série

$$\Sigma f(n)$$

de sommes partielles

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} f(k), n_0 \geqslant a$$

On a alors l'encadrement

$$\int_{n_0}^{n} f + f(n) \leqslant S_n \leqslant \int_{n_0}^{n} f + f(n_0)$$

D12
dont on déduit la propriété

$$\boxed{\sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n) < +\infty \Leftrightarrow \int_{n_0}^{+\infty} f < +\infty}, \quad \boxed{\sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n) = +\infty \Leftrightarrow \int_{n_0}^{+\infty} f = +\infty}$$

Autrement dit

$$\text{La série } \Sigma f(n) \text{ et l'intégrale impropre } \int^{+\infty} f \text{ sont de même nature}$$

Plus précisément

$$\text{si } I = \int_{n_0}^{+\infty} f < +\infty, \text{ alors } \boxed{I \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n) \leqslant I + f(n_0)}$$

D'où, si $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$, $\boxed{\int_n^{+\infty} f - f(n) \leqslant R_n \leqslant \int_n^{+\infty} f}$, et on aura en général $R_n \sim \int_n^{+\infty} f$

d'autre part :

$$\text{si } \int_{n_0}^{+\infty} f = +\infty \text{ alors } S_n \sim F(n)$$

D13

Application aux séries de Riemann (deuxième démonstration) :

PROP :

1) si $\alpha > 1$, alors $\Sigma \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente et

$$\frac{1}{\alpha - 1} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a} = \zeta(\alpha) \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha - 1}$$

et de plus

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{n^{\alpha - 1}}$$

REM : on en déduit :

$$\lim_{\alpha \xrightarrow{>} 1} \zeta(\alpha) = ...$$

2) si $\alpha < 1$, alors $\Sigma \frac{1}{n^\alpha}$ est divergente et

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1 - \alpha}}$$

3) si $\alpha = 1$, alors $\Sigma \frac{1}{n}$ est divergente et

$$\boxed{\ln n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = h_n \leqslant \ln n + 1}$$

D14

Application aux séries de Bertrand $\Sigma \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$:

La série $\Sigma \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ converge ssi $\beta > 1$.

(vient de $\int_2^x \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} = \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{du}{u^\beta}$).

ATTENTION : la décroissance de f dans le théorème ci dessus est importante :

Exemple de fonction continue positive sur $[1, +\infty[$ telle que $\Sigma f(n)$ converge , et $\int^{+\infty} f$ diverge :

Exemple de fonction continue positive sur $[1, +\infty[$ telle que $\Sigma f(n)$ diverge , et $\int^{+\infty} f$ converge :

V) Séries à termes quelconques ; convergence absolue.

TH de convergence absolue : soit Σu_n une série de terme général complexe ; alors

$$\Sigma |u_n| \text{ CV} \Rightarrow \Sigma u_n \text{ CV}$$

Et on a : $\left|\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|$.

D15

D'où la

DEF : si $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$, Σu_n est dite "absolument convergente" (abrégé en AC).

et si $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ existe sans que $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$, alors la série est dite "semi-convergente" (abrégé en SC, voir des exemples en VII))

MORALITE : on commencera toujours l'étude d'une série à termes quelconques par l'étude de la série des valeurs absolues.

VI) Opérations sur les séries.

Avec des notations "évidentes", on a les propriétés :

λAC=AC, λSC=SC si $\lambda \neq 0$, AC+AC=AC, AC+SC=SC, SC+SC=CV (AC ou SC), DV+CV=DV, DV+DV=??????

D16

VII) Exemples de séries semi-convergentes.

TH des séries alternées (hors programme) :

Si (a_n) est une suite positive, de limite nulle et DECROISSANTE, alors la série de terme général $(-1)^n a_n$ est convergente ; si donc Σa_n est divergente, $\Sigma (-1)^n a_n$ est semi-convergente.

D17

Application classique : la série harmonique alternée est semi-convergente.