CONCOURS TA A ÉPREUVES COMMUNES 1994

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES 2 : CORRIGÉ

PARTIE I : formules de Newton

I. 1.
On a en effet : $0 = \sum\limits_{k=1}^{n} P\left(z_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{i=0}^{n} a_i z_k^i = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \sum\limits_{k=1}^{n} z_k^i = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i S_i$.

Et de même : $0 = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k^{p-n} P\left(z_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{i=0}^{n} a_i z_k^{p-n+i} = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \sum\limits_{k=1}^{n} z_k^{p-n+i} = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i S_{p-n+i} = \sum\limits_{i=0}^{n} a_{n-i} S_{p-i}$.

I.2. Pour $n = 2$: $S_1 = -\dfrac{b}{a}$ et comme $aS_2 + bS_1 + 2c = 0$, $S_2 = \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{b^2}{a} - 2c\right) = \dfrac{b^2 - 2ac}{a^2}$.
Comme $aS_3 + bS_2 + cS_1 = 0, S_3 = \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{2abc - b^3}{a^2} + \dfrac{bc}{a}\right) = \dfrac{3abc - b^3}{a^3}$.

PARTIE II : Calcul de $\sum\limits_{k=1}^{n} \cot^{2p} \dfrac{k\pi}{2n+1}$

II.1. On a d'une part : $\left(e^{ix}\right)^{2n+1} = e^{i(2n+1)x} = \cos\left(2n+1\right)x + i\sin\left(2n+1\right)x$, et d'autre part : $\left(e^{ix}\right)^{2n+1}$
$\sin^{2n+1} x \left(\cot x + i\right)^{2n+1}$, d'où :

$$\frac{\sin\left(2n+1\right)x}{\sin^{2n+1} x} = \operatorname{Im}\left(\left(\cot x + i\right)^{2n+1}\right) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^{k} i^{2n+1-k} \cot^k x\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(-1\right)^{(n-k)} C_{2n+1}^{2k} \cot^{2k} x$$

Donc $\dfrac{\sin\left(2n+1\right)x}{\sin^{2n+1} x} = P\left(\cot^2 x\right)$, avec $P = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(-1\right)^{(n-k)} C_{2n+1}^{2k} X^k$.
P est de degré n, et son coefficient dominant est $C_{2n+1}^{2n} = 2n+1$.

II.2. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on a : $P\left(\cot^2 \dfrac{k\pi}{2n+1}\right) = \dfrac{\sin k\pi}{\sin^{2n+1} \dfrac{k\pi}{2n+1}} = 0$; la fonction cot étant strictement décroissante
$]0, \pi[$, les n réels $\cot^2 \dfrac{k\pi}{2n+1}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$ sont tous distincts et constituent donc les racines du polynôme P.

On peut donc écrire $P = \left(2n+1\right) \prod\limits_{k=1}^{n} \left(X - \cot^2 \dfrac{k\pi}{2n+1}\right)$.

II.3. Le nombre S_1 est la somme des racines de P, donc $S_1 = -\dfrac{-C_{2n+1}^{2n-2}}{2n+1} = \dfrac{\left(2n+1\right)2n\left(2n-1\right)}{6\left(2n+1\right)} = \dfrac{n\left(2n-1\right)}{3}$.
Comme $\dfrac{1}{\sin^2 x} = \cot^2 x + 1$, $S_1' = S_1 + n = 2\dfrac{n\left(n+1\right)}{3}$.

II.4. Pour $p \leqslant n$, la relation $\sum\limits_{i=0}^{p} a_{n-i} S_{p-i} = 0$ (avec la convention $S_0 = p$) s'écrit ici $\sum\limits_{i=0}^{p} \left(-1\right)^i C_{2n+1}^{2i+1} S_{p-i} = 0$, d'où

$$\left(2n+1\right) S_p = \sum_{i=1}^{p} \left(-1\right)^{i+1} C_{2n+1}^{2i+1} S_{p-i}$$

II.5. La suite $\left(\dfrac{S_0}{n^{2\times 0}}\right)_{n\geqslant 1} = \left(p\right)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

Supposons que pour $1 \leqslant i \leqslant p$ les suites $\left(\dfrac{S_{p-i}}{n^{2(p-i)}}\right)_{n\geqslant 1}$ sont convergentes vers respectivement α_{p-i} ; alors, com
$\dfrac{S_p}{n^{2p}} = \sum\limits_{i=1}^{p} \left(-1\right)^{i+1} \dfrac{C_{2n+1}^{2i+1}}{\left(2n+1\right)n^{2i}} \dfrac{S_{p-i}}{n^{2(p-i)}}$ et comme

$$\frac{C_{2n+1}^{2i+1}}{\left(2n+1\right)n^{2i}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\dfrac{\left(2n\right)^{2i+1}}{\left(2i+1\right)!}}{2n^{2i+1}} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} \frac{2^{2i}}{\left(2i+1\right)!}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{S_p}{n^{2p}} = \sum\limits_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\dfrac{2^{2i}}{(2i+1)!}\alpha_{p-i}$, ce qui achève la récurrence.
On a bien la relation :

$$\alpha_p = \sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\frac{2^{2i}}{(2i+1)!}\alpha_{p-i}$$

$\dfrac{S_1}{n^2} = \dfrac{2n-1}{3n} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} \alpha_1 = \dfrac{2}{3}$
$\alpha_2 = \dfrac{2^2}{3!}\alpha_1 - \dfrac{2^4}{5!}2 = \dfrac{8}{45}$
$\alpha_3 = \dfrac{2^2}{3!}\alpha_2 - \dfrac{2^4}{5!}\alpha_1 + \dfrac{2^6}{7!}3 = \dfrac{64}{945}$

II.6. $S'_p = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\left(\cos^2\dfrac{k\pi}{2n+1}+\sin^2\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)^p}{\sin^{2p}\dfrac{k\pi}{2n+1}} = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\cot^2\dfrac{k\pi}{2n+1}+1\right)^p = \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{i=0}^{p}C_p^i\cot^{2i}\dfrac{k\pi}{2n+1} = \sum\limits_{i=0}^{p}C_p^i\sum\limits_{k=1}^{n}\cot^{2i}\dfrac{k\pi}{2n+1}$
$= \sum\limits_{i=1}^{p}C_p^iS_i + n.$
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{S'_p}{n^{2p}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{S_p}{n^{2p}}+\sum\limits_{i=1}^{p}C_p^i\dfrac{S_i}{n^{2p}}+\dfrac{1}{n^{2p-1}}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{S_p}{n^{2p}}\right) = \alpha_p.$

PARTIE III. Un premier calcul de $\zeta(2p) = \sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^{2p}}$

III.1. Pour $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}], \sin x \leqslant x \leqslant \tan x$, donc pour $x\in]0,\dfrac{\pi}{2}[, \cot x \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{\sin x}$;
Donc

$$\sum_{k=1}^{n}\cot^{2p}\frac{k\pi}{2n+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)^{2p}} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^{2p}\dfrac{k\pi}{2n+1}}$$

soit

$$\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)^{2p}S_p \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \zeta_n(2p) \leqslant \left(\frac{\pi}{2n+1}\right)^{2p}S'_p$$

d'où

$$\frac{\pi^{2p}}{2^{2p}}\frac{S_p}{\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^{2p}} \leqslant \zeta_n(2p) \leqslant \frac{\pi^{2p}}{2^{2p}}\frac{S'_p}{\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^{2p}}$$

III.2. Comme $\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^{2p} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{2p}$, on en déduit

$$\boxed{\zeta(2p) = \alpha_p\frac{\pi^{2p}}{2^{2p}} = \left(\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\cot^2\dfrac{k\pi}{2n+1}}{n^{2p}}\right)\frac{\pi^{2p}}{2^{2p}}}$$

On trouve $\zeta(2) = \dfrac{2}{3}\dfrac{\pi^2}{4} = \boxed{\dfrac{\pi^2}{6}}, \zeta(4) = \dfrac{8}{45}\dfrac{\pi^4}{16} = \boxed{\dfrac{\pi^4}{90}}, \zeta(6) = \dfrac{64}{945}\dfrac{\pi^6}{64} = \boxed{\dfrac{\pi^6}{945}}.$

PARTIE IV : Un deuxième calcul de $\zeta(2p) = \sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^{2p}}$

IV. 1. $a_0(f) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cot(ty)\,dt = \dfrac{\sin(\pi y)}{\pi y}$;
Pour $n\geqslant 1$, $a_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cot(ty)\cos(nt)\,dt = \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{\sin(\pi y+n\pi)}{y+n}+\dfrac{\sin(\pi y-n\pi)}{y-n}\right) = \dfrac{(-1)^n}{\pi}\sin(\pi y)\dfrac{2y}{y^2-n^2}.$
Et les $b_n(f)$ sont nuls car f est paire.

f étant de classe C^1 sur $[-\pi,\pi]$ et continue sur $\mathbb{R}$, f est bien la somme de sa série de Fourier.

IV.2. On peut donc écrire $f(t) = \dfrac{1}{\pi}\sin(\pi y)\left(\dfrac{1}{y} + \sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^n \cos(nt)\dfrac{2y}{y^2-n^2}\right)$.

Faisant $t=\pi$, on obtient $\cos(\pi y) = \dfrac{1}{\pi}\sin(\pi y)\left(\dfrac{1}{y} + \sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{2y}{y^2-n^2}\right)$, d'où

$$\cot(\pi y) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{y} + \sum_{n\geqslant 1}\frac{2y}{y^2-n^2}\right) \text{(développement d'Euler en "éléments simples")}$$

IV. 3. $\dfrac{1}{1-\dfrac{x^2}{n^2\pi^2}} = \sum\limits_{p\geqslant 0}\dfrac{x^{2p}}{(n\pi)^{2p}}$ pour $|x| < n\pi$; donc en utilisant le développement ci-dessus avec $\pi y = x$, on obtient, p
$x \in]0,\pi[$:

$$\begin{aligned}
x\cot x &= 1 - \sum_{n\geqslant 1}\frac{2x^2}{n^2\pi^2}\frac{1}{1-\dfrac{x^2}{n^2\pi^2}} \\
&= 1 - \sum_{n\geqslant 1}\sum_{p\geqslant 0}\frac{2x^2}{n^2\pi^2}\frac{x^{2p}}{(n\pi)^{2p}} \\
&= 1 - \sum_{n\geqslant 1}\sum_{p\geqslant 1}2\frac{x^{2p}}{(n\pi)^{2p}} \text{(translation d'indice : nouveau } p = \text{ancien } p+1) \\
&= 1 - \sum_{p\geqslant 1}\sum_{n\geqslant 1}2\frac{x^{2p}}{(n\pi)^{2p}} \text{ (interversion des signes sommes car } 2\frac{x^{2p}}{(n\pi)^{2p}} > 0) \\
&= 1 - \sum_{p\geqslant 1}\frac{2}{\pi^{2p}}\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{2p}}\right)x^{2p} \\
&= \boxed{1 - \sum_{p\geqslant 1}\frac{2}{\pi^{2p}}\zeta(2p)\,x^{2p}}
\end{aligned}$$

IV.4. : D'après 3), $h(x) = 1 - \sum\limits_{p\geqslant 1}\dfrac{2}{(2\pi)^{2p}}\zeta(2p)\,x^{2p}$ pour $x \in]-2\pi,2\pi[$; h est donc de classe C^∞ sur $]-2\pi,2\pi[$ com
somme d'une série entière.

IV.5. D'après la formule de Taylor, $h(x) = B_0 - \sum\limits_{p\geqslant 1}B_p x^{2p}$; donc, par l'unicité du développement :

$$\boxed{\zeta(2p) = \frac{1}{2}\frac{(2\pi)^{2p}}{(2p)!}B_p}$$

IV.6. On identifie les 2 expressions de $\zeta(2p)$: $\alpha_p\dfrac{\pi^{2p}}{2^{2p}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{(2\pi)^{2p}}{(2p)!}B_p$, donc

$$\boxed{\alpha_p = \frac{1}{2}\frac{2^{4p}}{(2p)!}B_p}$$

Or la relation de II.5. peut s'écrire :

$$(-1)^p\frac{\alpha_p}{2^{2p}} = \sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{k-1}\frac{1}{(2p-2k+1)!}\frac{\alpha_k}{2^{2k}} - \frac{p}{(2p+1)!}$$

soit

$$\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}\frac{1}{(2p-2k+1)!}\frac{\alpha_k}{2^{2k}} = \frac{p}{(2p+1)!}$$

En remplaçant α_k par $\frac{1}{2}\frac{2^{4k}}{(2k)!}B_k$, on obtient bien :

$$\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}C_{2p+1}^{2k}2^{2k}B_k = 2p$$

PARTIE V : Justification de l'interversion des signes $\sum$.

V.1. $v_n = \sum_{k=1}^{n} u_{k,p}$; (v_n) est croissante car $u_{k,p} \geqslant 0 \ \ \forall k, p$;

or $u_{k,p} \leqslant S_k$, donc $v_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} S_k \leqslant S$;

(v_n) est donc majorée : elle converge vers $T_p = \sum_{n\geqslant 1} u_{n,p}$

V.2. Soit $w_p = \sum_{k=1}^{p} T_k$; (w_p) est croissante, et $w_p = \sum_{k=1}^{p}\sum_{n\geqslant 1} u_{n,k} = \sum_{n\geqslant 1}\sum_{k=1}^{p} u_{n,k}$ (il s'agit ici d'une somme finie de sé
convergentes)

Or $\sum_{k=1}^{p} u_{n,k} \leqslant S_n$, donc $w_p \leqslant \sum_{n\geqslant 1} S_n = S$; (w_p) est croissante majorée : elle converge vers $S' \leqslant S$.

Mais si on échange maintenant les 2 indices de $u_{n,p}$ (en posant $v_{n,p} = u_{p,n}$), le même raisonnement va aboutir à $S \leqslant$
donc $S = S'$, CQFD.